

CRMEF Marrakech–Safi
Cycle de préparation à l'agrégation
Département d'informatique

Polycopié
Algèbre linéaire

destiné aux agrégatifs
1^{ère} année Informatique

Année universitaire 2025–2026

Ridwane Tahiri

Table des matières

1	Calcul matriciel	11
1.1	Introduction	11
1.2	Ensembles de matrices	11
1.3	Opérations sur les matrices	12
1.4	Matrices élémentaires et symbole de Kronecker	13
1.5	Produit de matrices	13
1.6	Transposition	13
1.7	Matrices carrées particulières	14
1.7.1	Formule du binôme	14
1.8	Matrices inversibles	15
1.9	Opérations élémentaires et échelonnement	16
1.9.1	Inversibilité et méthode du pivot	19
1.9.2	Propriétés fondamentales du rang et de la forme échelonnée réduite	20
1.10	Systèmes linéaires et matrices	21
1.10.1	Systèmes linéaires à n équations et p inconnues	21
1.10.2	Écriture matricielle d'un système linéaire	22
1.10.3	Méthode du pivot de Gauss	22
1.11	Exercices	22
2	Espaces vectoriels	29
2.1	Espaces vectoriels	29
2.1.1	Définition	29
2.1.2	Exemples : espaces vectoriels usuels	31
2.1.3	Calculs dans un espace vectoriel	31
2.1.4	Sous-espace vectoriel engendré par une partie	32
2.1.5	Sommes de sous-espaces vectoriels	34
2.1.6	Somme directe de sous-espaces vectoriels	34
2.1.7	Sous-espaces supplémentaires	35
2.2	Familles finies de vecteurs	36
2.2.1	Familles libres et liées	36
2.2.2	Familles génératrices	38
2.2.3	Bases et coordonnées	39
2.3	Exercices	40

3	Applications linéaires	43
3.1	Applications linéaires	43
3.1.1	Définitions et propriétés générales	43
3.1.2	Opérations	44
3.2	Noyau, image et rang d'une application linéaire	45
3.2.1	Noyau et lien avec l'injectivité	45
3.2.2	Image et lien avec la surjectivité	46
3.2.3	Rang d'une application linéaire	46
3.2.4	Image d'une base par une application linéaire	47
3.3	Matrice d'une application linéaire	47
3.3.1	Représentation matricielle d'une famille de vecteurs (rappel)	47
3.3.2	Matrice d'une application linéaire	48
3.4	Application linéaire canoniquement associée à une matrice	49
3.4.1	Matrices et opérations	50
3.5	Exercices	51
4	Notions sur les polynômes	55
4.1	Définition et structure algébrique	55
4.2	Degré d'un polynôme	55
4.3	Sous-espaces de polynômes	56
4.3.1	Division euclidienne	56
4.4	Racines et multiplicité	56
4.5	Polynôme d'un endomorphisme	56
4.6	Polynôme caractéristique	57
4.7	Exercices	57
5	Réduction des endomorphismes	59
5.1	Éléments propres	59
5.1.1	Définitions	59
5.1.2	Sous-espace propre	59
5.2	Cas matriciel	59
5.3	Multiplicités	60
5.4	Indépendance des vecteurs propres	60
5.5	Diagonalisation	60
5.5.1	Définition	60
5.5.2	Critère fondamental	61
5.5.3	Critère en termes de multiplicités	61
5.5.4	Formulation matricielle	61
5.6	Méthode pratique de diagonalisation	61
5.7	Cas particuliers	61
5.7.1	Valeurs propres distinctes	61
5.7.2	Cas complexe	62
5.8	Exercices	62

6	Espaces euclidiens	65
6.1	Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens	65
6.1.1	Produit scalaire, norme euclidienne	65
6.1.2	Orthogonalité, base orthonormale	66
6.1.3	Endomorphismes d'un espace euclidien	67
6.2	Etude des groupes orthogonaux en dimension 2 et 3.	68
6.2.1	Diagonalisation des endomorphismes symétriques	69
6.3	Exercices	70

Avant-propos

Ce polycopié s'adresse aux étudiants agrégatifs de première année en informatique. Il a pour objectif de fournir une présentation rigoureuse et progressive des notions fondamentales de l'algèbre linéaire, tout en mettant l'accent sur le calcul matriciel et ses applications en informatique.

Le choix de commencer par le calcul matriciel est motivé par son caractère concret et opérationnel. Les matrices constituent en effet un outil central en informatique, notamment dans la résolution des systèmes linéaires, le traitement des images, l'analyse des graphes, l'apprentissage automatique et l'algorithmique numérique. Cette approche permet à l'étudiant d'acquérir rapidement des compétences de calcul et une intuition utile pour l'introduction ultérieure des concepts plus abstraits.

Le polycopié est structuré de manière progressive afin de couvrir un spectre de connaissances allant du niveau L1 au niveau L3. Les premiers chapitres sont consacrés aux aspects calculatoires et algorithmiques, tandis que les chapitres suivants introduisent les fondements théoriques de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, représentations matricielles et réduction des endomorphismes. Une dernière partie est dédiée aux espaces euclidiens, dont les applications sont essentielles en informatique appliquée.

Le choix pédagogique adopté dans ce document est volontairement synthétique. On y trouvera essentiellement :

- les définitions fondamentales,
- les théorèmes et résultats essentiels,
- ainsi que des exercices d'entraînement.

Les preuves des résultats, les exemples illustratifs, les applications ainsi que la correction détaillée des exercices seront développés et discutés durant les séances de cours. Ce choix permet de privilégier l'interaction pédagogique en classe et d'encourager la réflexion active des étudiants.

Ce document est conçu comme un support de cours modulable. Certaines sections peuvent être approfondies ou, au contraire, omises selon le niveau et le rythme de l'enseignement.

Enfin, l'auteur espère que ce polycopié constituera un outil utile tant pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire que pour la compréhension de ses nombreuses applications en informatique.

Introduction générale

L'algèbre linéaire occupe une place centrale dans la formation des informaticiens. Elle constitue un langage fondamental pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes rencontrés en algorithmique, en analyse de données, en traitement d'images, en théorie des graphes et en apprentissage automatique. Ce module vise à fournir aux étudiants agrégatifs de première année en informatique les outils essentiels de l'algèbre linéaire, en alliant rigueur mathématique, efficacité calculatoire et intuition algorithmique.

Ce polycopié est organisé en six chapitres, conçus de manière progressive. Le premier chapitre est consacré au calcul matriciel, dans lequel la notion de matrice est introduite sous sa forme la plus naturelle pour l'informaticien, à savoir celle d'un tableau de données. Les opérations matricielles usuelles ainsi que certaines matrices particulières y sont présentées, avec une attention particulière portée à la résolution des systèmes linéaires. La notion de matrice *r-échelonnée réduite* (*Row Reduced Echelon Form*) y est introduite, ainsi que l'algorithme **RREF**, utilisé pour le calcul du rang et la résolution des systèmes. Cet algorithme pourra être implémenté, par exemple en langage **Python**, afin de renforcer le lien entre théorie et pratique.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des systèmes linéaires de la forme $Ax = b$. La forme échelonnée réduite y est exploitée pour décrire de manière claire la structure des solutions, en distinguant les variables principales et les variables auxiliaires. L'algorithme **RREF** constitue l'outil central pour l'échelonnement et la résolution effective de ces systèmes.

Le troisième chapitre introduit les notions fondamentales relatives aux espaces vectoriels. Les définitions et résultats théoriques y sont illustrés par de nombreux exemples issus des chapitres précédents, afin de faciliter la transition entre le calcul matriciel et le cadre abstrait de l'algèbre linéaire.

Le quatrième chapitre est consacré aux polynômes d'une variable. Après l'étude des notions élémentaires telles que les racines et la division euclidienne, le chapitre introduit les polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, ainsi que leurs polynômes caractéristiques, outils indispensables pour la compréhension des problèmes de réduction.

Le cinquième chapitre traite de la réduction des endomorphismes et des matrices carrées. On y rappelle les notions de valeurs propres et de vecteurs propres, puis on étudie la diagonalisation des matrices et des endomorphismes. La notion de matrice *r-échelonnée réduite* est de nouveau utilisée comme un outil de calcul permettant d'aborder efficacement ces questions.

Enfin, le sixième chapitre est consacré aux espaces euclidiens. On y étudie les produits scalaires, les normes, l'inégalité de Cauchy–Schwarz et les matrices symétriques définies positives. Le chapitre se conclut par la diagonalisation des matrices réelles symétriques dans une base orthonormale, résultat fondamental tant du point de vue théorique que pour ses nombreuses applications en informatique.

L'ensemble de ce polycopié est conçu comme un support pédagogique progressif, adaptable au rythme de l'enseignement, et destiné à accompagner l'étudiant dans l'acquisition d'une solide maîtrise des outils de l'algèbre linéaire et de leurs applications.

Chapitre 1

Calcul matriciel

1.1 Introduction

Les matrices sont des objets mathématiques qui se présentent comme des tableaux de nombres. Elles apparaissent dans de multiples domaines d'application et sont incontournables pour les épreuves écrites des concours.

Quelques applications :

- La géométrie : les matrices représentent des applications linéaires (translations, rotations, symétries, ...) permettant de combiner plusieurs transformations.
- Calcul du terme général de suites récurrentes.
- Manipulation synthétique des systèmes linéaires.
- Modélisation en probabilités, par exemple les chaînes de Markov.

L'objectif principal de ce chapitre est la méthode du Pivot : décomposer une matrice rectangulaire A en un produit de la forme $A = ER$, où R est échelonnée réduite par lignes et E est un produit de matrices élémentaires.

1.2 Ensembles de matrices

Définition 1.1 (Matrices). Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une matrice M de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de nombres $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, notée

$$M = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}.$$

qui à chaque couple (i, j) associe un élément noté a_{ij} .

Une matrice A de taille $n \times p$ s'écrit alors sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} est l'élément situé à la i -ème ligne et j -ème colonne.

Définition 1.2. On note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées.
- $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les matrices lignes et colonnes.

1.3 Opérations sur les matrices

Définition 1.3 (Multiplication par un scalaire). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La multiplication de A par λ est la matrice $(c_{i,j})$ définie par :

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

Exemple 1.1. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 2$, on obtient

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.4 (Addition de matrices). Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme $A + B$ est la matrice $(c_{i,j})$ où

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Exemple 1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1. Il est essentiel de vérifier que les matrices ont la même taille pour l'addition.

Proposition 1.1 (Propriétés de l'addition). Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

- $A + B = B + A$ (commutativité)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité)

Proposition 1.2 (Propriétés de la multiplication par un scalaire). Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

1. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
2. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Définition 1.5 (Combinaison linéaire). Une combinaison linéaire de $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est

$$M = \lambda A + \mu B, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Exemple 1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$M = A + iB = \begin{pmatrix} 1-i & 1+2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix}.$$

1.4 Matrices élémentaires et symbole de Kronecker

Définition 1.6 (Matrices élémentaires). $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a pour coefficients

$$e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Proposition 1.3. *Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $E_{i,j}$:*

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{i,j} E_{i,j}.$$

Définition 1.7 (Symbole de Kronecker). $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Remarque 1.2. Pour $E_{i,j} = (e_{k,l})$, on a $e_{k,l} = \delta_{i,k} \delta_{j,l}$.

1.5 Produit de matrices

Définition 1.8 (Produit matriciel). Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$:

$$C = AB \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}), \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 1.3.

1. Le produit AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Le produit d'une matrice ligne et colonne de même longueur est un scalaire ; celui d'une colonne et ligne est une matrice carrée.

Proposition 1.4 (Propriétés du produit). Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $A(\lambda B) = \lambda(AB)$
2. $A(B + B') = AB + AB'$, $(A + A')B = AB + A'B$
3. $(AB)C = A(BC)$

1.6 Transposition

Définition 1.9 (Transposée). Pour $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $(M^T)_{i,j} = M_{j,i}$.

Proposition 1.5.

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$

2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(AC)^T = C^T A^T$
4. $(A^T)^T = A$

1.7 Matrices carrées particulières

Définition 1.10 (Matrice identité et matrice nulle). .

- I_n est la matrice diagonale de taille n avec 1 sur la diagonale.
- 0_n est la matrice nulle de taille n .

Définition 1.11 (Puissance d'une matrice). .

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$A^0 = I_n, \quad A^k = A \cdot A \cdots A \text{ (} k \text{ fois)}.$$

Définition 1.12 (Matrices triangulaires et diagonales). — Triangulaire supérieure :

- $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.
- Triangulaire inférieure : $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$.
- Diagonale : $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, notée $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Proposition 1.6. Si $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $D^k = \text{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Définition 1.13 (Symétrique et antisymétrique). M est symétrique si $M^T = M$, antisymétrique si $M^T = -M$.

1.7.1 Formule du binôme

Il est possible d'étendre la formule du binôme aux matrices carrées, en ajoutant la condition que celles-ci commutent ($AB = BA$).

Proposition 1.7. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices telles que $AB = BA$ (c'est-à-dire que A et B commutent). Alors, pour tout $p \geq 1$, on a :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Démonstration. Identique à celle de la formule du binôme pour les complexes. (Preuve par récurrence sur p .) □

Exemple 1.4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $AB = BA = B$ car $A = I_2$, donc les matrices commutent et on peut appliquer la formule du binôme. Remarquons que $B^2 = 0_2$ et que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A^m = A = I_2$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\begin{aligned}
 (A + B)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^{p-k} B^k \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k \\
 &= \binom{p}{0} B^0 + \binom{p}{1} B^1 + 0 \\
 &= I_2 + pB \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.8 Matrices inversibles

Définition 1.14 (Inverse). $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. On note $B = A^{-1}$.

Proposition 1.8 (Unicité de l'inverse). Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Autrement dit, l'inverse d'une matrice est unique.

Démonstration. Supposons que B et C soient deux inverses de A . Alors

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

Ainsi $B = C$, ce qui prouve l'unicité. □

Remarque 1.4. — L'unicité de l'inverse justifie l'emploi de l'expression *l'inverse* de A et la notation A^{-1} .

— L'ensemble des matrices inversibles est noté $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ (groupe linéaire).

Proposition 1.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n.$$

Remarque 1.5 (Montrer qu'une matrice est l'inverse d'une autre). Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n . Pour montrer que B est l'inverse de A , il suffit de calculer l'un des deux produits AB ou BA et de vérifier que le résultat est la matrice identité I_n .

Exemple 1.5. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie en effet que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Proposition 1.10. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

1. *La matrice identité I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.*
2. *La matrice nulle n'est pas inversible.*
3. *Si A et B sont deux matrices non nulles telles que $AB = 0$, alors ni A ni B ne sont inversibles.*

Théorème 1.1 (Propriétés du groupe linéaire). *Soient $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

1. *Le produit AB est inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

2. *On a $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Démonstration. Ces résultats se démontrent directement à partir de la définition de l'inverse d'une matrice. $\square$

1.9 Opérations élémentaires et échelonnement

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle *opérations élémentaires sur les lignes* les transformations suivantes :

1. **Permutation de deux lignes** : $L_i \longleftrightarrow L_j$, avec $i \neq j$.
2. **Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul** : $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
3. **Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne** : $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Matrices élémentaires associées

À chaque opération élémentaire sur les lignes correspond une matrice élémentaire. Soit I_m la matrice identité d'ordre m .

1) Matrice de permutation de deux lignes La matrice élémentaire associée à l'opération

$$L_i \longleftrightarrow L_j \quad (i \neq j)$$

est obtenue en échangeant les lignes i et j de I_m .

Elle est de la forme :

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

où les coefficients 1 situés aux positions (i, j) et (j, i) remplacent les 1 diagonaux correspondants.

Plus précisément :

$$(P_{ij})_{kk} = 1 \text{ pour } k \neq i, j, \quad (P_{ij})_{ij} = (P_{ij})_{ji} = 1, \quad (P_{ij})_{ii} = (P_{ij})_{jj} = 0.$$

2) Matrice de dilatation d'une ligne La matrice élémentaire associée à

$$L_i \longleftarrow \lambda L_i, \quad \lambda \in \mathbb{K}^*$$

est obtenue en multipliant par λ le coefficient diagonal (i, i) de I_m .

Elle est diagonale :

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$(D_i(\lambda))_{kk} = \begin{cases} \lambda & \text{si } k = i, \\ 1 & \text{si } k \neq i, \end{cases} \quad (D_i(\lambda))_{kl} = 0 \text{ si } k \neq l.$$

3) Matrice de transvection (ajout d'un multiple d'une ligne à une autre) La matrice élémentaire associée à

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j, \quad i \neq j$$

est obtenue en ajoutant λ à la position (i, j) de I_m .

Elle est de la forme :

$$T_{ij}(\lambda) = I_m + \lambda E_{ij},$$

où E_{ij} est la matrice ayant 1 en position (i, j) et 0 ailleurs.

Explicitement :

$$(T_{ij}(\lambda))_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ \lambda & \text{si } (k, l) = (i, j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriété d'inversibilité

- $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.
- $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$.
- $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.

Ainsi, toute matrice élémentaire est inversible et son inverse est encore une matrice élémentaire du même type.

Si E est une matrice élémentaire de taille $m \times m$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice EA est obtenue en appliquant à A l'opération élémentaire correspondant à E .

EA = matrice obtenue à partir de A par l'opération élémentaire associée à E .

Propriété fondamentale. Toute matrice élémentaire est inversible et son inverse est encore une matrice élémentaire du même type.

Conséquence. Deux matrices A et B sont équivalentes par lignes si et seulement s'il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_k$ telles que

$$B = E_k \cdots E_1 A.$$

Échelonnement d'une matrice

Définition 1.15. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est dite *échelonnée* (ou sous forme échelonnée par lignes) si :

1. Les lignes nulles éventuelles sont situées en bas de la matrice.
2. Dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul (appelé *pivot*) est strictement à droite du pivot de la ligne précédente.
3. Tous les coefficients situés en dessous d'un pivot sont nuls.

Définition 1.16. Une matrice échelonnée est dite *échelonnée réduite* si, de plus :

1. Chaque pivot vaut 1.
2. Chaque pivot est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Procédé d'échelonnement (méthode du pivot de Gauss)

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ peut être transformée en une matrice échelonnée (et même échelonnée réduite) par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Le procédé consiste à :

1. Choisir un pivot non nul dans la première colonne non encore traitée.
2. Éliminer les coefficients situés en dessous (et éventuellement au-dessus) de ce pivot à l'aide d'opérations du type

$$L_i \longleftarrow L_i - \lambda L_j.$$

- Recommencer sur la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne du pivot.

Théorème. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice échelonnée réduite R équivalente à A . Cette matrice R est unique et est appelée *forme échelonnée réduite* de A .

Rang et échelonnement

Le nombre de pivots d'une matrice échelonnée est égal au rang de la matrice initiale. En particulier,

$$\text{rang}(A) = \text{nombre de lignes non nulles dans une forme échelonnée de } A.$$

L'échelonnement fournit ainsi une méthode effective de calcul du rang et de résolution des systèmes linéaires.

Proposition 1.11. *Deux systèmes reliés par des opérations élémentaires ont le même ensemble de solutions.*

1.9.1 Inversibilité et méthode du pivot

Proposition 1.12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Si, lors de l'échelonnement de A , une ligne nulle apparaît, alors A n'est pas inversible.*
- *Si l'échelonnement ne fait apparaître aucune ligne nulle, alors A est inversible.*

Méthode 1.17 (Calcul de l'inverse par le pivot). *Pour déterminer si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et calculer son inverse :*

- Former la matrice augmentée $(A | I_n)$.
- Appliquer la méthode du pivot de Gauss.
- Si l'on obtient une matrice $(I_n | M)$, alors $A^{-1} = M$.

Exemple 1.6. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 14 & 2 & -6 \\ -23 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.1. Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

à l'aide de la méthode du pivot.

1.9.2 Propriétés fondamentales du rang et de la forme échelonnée réduite

Proposition 1.13 (Existence et unicité de la forme échelonnée réduite). *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ unique, sous forme échelonnée réduite par lignes, et des matrices élémentaires $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telles que*

$$G_1 \cdots G_k A = R.$$

La démonstration sera faite en classe.

Proposition 1.14 (Définition du rang). *Avec les notations précédentes, le nombre r de pivots de R est indépendant des opérations effectuées. Cet entier r est appelé le rang de A et est noté $\text{rg}(A)$.*

La démonstration sera laissée en exercice.

Proposition 1.15 (Cas des matrices inversibles). *Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Alors*

$$A \text{ est inversible} \iff \text{rg}(A) = m.$$

Dans ce cas,

$$\text{rref}(A) = I_m,$$

et toute matrice inversible est produit fini de matrices élémentaires.

La démonstration sera faite en classe.

Proposition 1.16 (Invariance par multiplication à gauche). *Soit $G \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inversible et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors*

$$\text{rref}(GA) = \text{rref}(A) \quad \text{et} \quad \text{rg}(GA) = \text{rg}(A).$$

Démonstration laissée en exercice.

Proposition 1.17 (Rang d'une sous-famille de lignes). *Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inversible et $K \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$ formée de r lignes distinctes de A . Alors*

$$\text{rg}(K) = r.$$

La démonstration sera faite en classe.

Proposition 1.18 (Rang et transposition). *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,*

$$\text{rg}(A^\top) = \text{rg}(A).$$

Démonstration laissée en exercice.

Proposition 1.19 (Réduction bilatère). *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r . Alors il existe des matrices inversibles*

$$G \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

telles que

$$GAH = J_{r,m,n},$$

où $J_{r,m,n}$ désigne la matrice bloc

$$J_{r,m,n} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La démonstration sera faite en classe.

Proposition 1.20 (Invariance du rang par multiplication à droite). *Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors*

$$\text{rg}(AH) = \text{rg}(A).$$

Démonstration laissée en exercice. =====

1.10 Systèmes linéaires et matrices

1.10.1 Systèmes linéaires à n équations et p inconnues

Définition 1.18 (Équation linéaire). Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_p, b \in \mathbb{K}$. Une *équation linéaire à p inconnues* est une relation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = b.$$

Définition 1.19 (Système linéaire). Un *système linéaire* de n équations à p inconnues est un système de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n. \end{cases}$$

Les coefficients $a_{i,j}$ et les seconds membres b_i sont dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.20. Résoudre un système linéaire consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions. Un système est dit *compatible* s'il admet au moins une solution, sinon il est *incompatible*.

1.10.2 Écriture matricielle d'un système linéaire

Un système linéaire (S) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$AX = B,$$

où

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Définition 1.21 (Matrice augmentée). La *matrice augmentée* associée au système (S) est la matrice

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K}).$$

1.10.3 Méthode du pivot de Gauss

Méthode 1.22 (Méthode du pivot de Gauss). *Pour résoudre un système linéaire :*

1. On travaille sur la matrice augmentée $(A|B)$.
2. On applique des opérations élémentaires afin d'obtenir une matrice échelonnée.
3. On distingue :
 - une ligne de la forme $(0 \cdots 0 | c)$ avec $c \neq 0$: le système est incompatible ;
 - sinon, le système est compatible.
4. On remonte alors le système pour déterminer les solutions.

Exemple 1.7. Résolvons le système

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y + z = 3, \\ 2y + z = 1. \end{cases}$$

Après échelonnement, on obtient une solution unique :

$$(x, y, z) = (1, 1, -1).$$

1.11 Exercices

1. Échelonnement d'une matrice, rang, calcul de l'inverse

Exercice 1

Échelonner les matrices suivantes, trouver leur rang et dire si elles sont inversibles. Le cas échéant, calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Pour quelles valeurs du paramètre t , la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1+t & -1 & 2 \\ 2 & -t & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Trouver le rang des matrices suivantes :

$$(i) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Trouver le rang des matrices suivantes en fonction de la valeur du paramètre p :

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & p & -1 & 2 \\ 2 & -1 & p & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Résolution de systèmes linéaires

Exercice 5

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants. Vérifier si la solution obtenue est correcte :

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = 3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$$

Exercice 6

Déterminer les solutions des systèmes suivants. Décrire votre solution en termes d'intersections de plans. Il n'est pas nécessaire de faire un dessin :

$$(a) \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 4x + 13y + z = 0 \\ 7x + 22y + 13z = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 6x + y + 4z = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 4x + 13y + 7z = 0 \\ 7x + 22y + 13z = 0 \end{cases}$$

Exercice 7

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 7x + 2y - 3z = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -x + 4y + 2z = 2 \\ 7x - 6y - 8z = -4 \end{cases}$$

Exercice 8

Ayant à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = 1 & (e_1) \\ 2x + 3y - 5z = 4 & (e_2) \\ 2x + 3y + z = 5 & (e_3) \end{cases}$$

Un étudiant démarre ainsi : « J'élimine en retranchant e_2 de e_1 , e_3 de e_2 , et e_1 de e_3 . » Il obtient :

$$\begin{cases} 4y + 6z = -3 \\ -6z = -1 \\ -4y = 4 \end{cases}$$

Le système ainsi obtenu est-il équivalent au système initial ? Résoudre le système par la méthode de Gauss.

Exercice 9

Considérons le système suivant, où k est un nombre arbitraire :

$$\begin{cases} x + y - z = -12 \\ 3x - 5y + 13z = 18 \\ x - 2y + 5z = k \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de k le système a-t-il au moins une solution ? Pour chacune de ces valeurs de k , déterminer le nombre de solutions du système. Déterminer toutes les solutions pour chaque valeur de k .

Exercice 10

Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p)$, $(2, q)$, $(3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Exercice 11

Résoudre les systèmes linéaires suivants selon la valeur du paramètre a :

$$(i) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + az = 2 \\ x + ay + z = 3 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ ax + ay + 3z = 1 \\ ax + ay + az = 1 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} (a - 2)x + (2a - 1)y = 2 - a \\ 2x + (3 + a)y = 2a \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x - y + az = 0 \\ x + 10y - 6z = a \end{cases}$$

$$(vi) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 8x - 5y + z = a \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 12

Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = -4 \end{cases} \\
 \text{(ii)} \quad & \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y = 0 \\ -2y + z = -3 \end{cases} \\
 \text{(iii)} \quad & \begin{cases} x + 2y - 2z + 4t = 2 \\ y + 3z - 4t = -2 \\ z - 2t = 0 \\ x + y - z + 2t = 2 \end{cases} \\
 \text{(iv)} \quad & \begin{cases} x - y + z - t + w = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - 2y + 3z - t + 2w = 0 \\ 4x - 2y + 6z - 3t + 3w = 0 \end{cases} \\
 \text{(v)} \quad & \begin{cases} x + 2y - 2z + 4t + u = 0 \\ w + 3z - 4t + 2u = 0 \\ x + z - 2t + 3u = 0 \\ x + y + 4z - 6t + 5u = 0 \\ 3y + 2t = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

3. Application de l'échelonnement aux familles de vecteurs**Exercice 13**

Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$, en déterminer des bases et en déduire leurs dimensions :

$$\begin{aligned}
 F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\} \\
 G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0 \text{ et } x = y\} \\
 H &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - t = 0\} \\
 K &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0 \text{ et } x + y + z + t = 0\}
 \end{aligned}$$

Exercice 14

Considérons la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivante où $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), \quad v_2 = (1, 0, 1, 2), \quad v_3 = (1, 3, 5, 7), \quad v_4 = (0, 2, 3, \alpha)$$

1. Pour quelles valeurs de α la famille forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
2. Dans le cas où la famille est liée, déterminer toutes les relations linéaires liant ces vecteurs. Quelle est la dimension de l'espace engendré ?
3. Soit $v = (-2, k, 1, 3)$. Pour quelles valeurs de k a-t-on $v \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$? Dans ce cas, déterminer les composantes du vecteur v dans une base de $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exercice 15

Quel est le rang des familles de vecteurs suivantes ? Sont-elles libres ? Donner une équation du sous-espace engendré :

1. $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, -1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^4$.
4. $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 0, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^4$.
5. $v_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $v_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $v_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $v_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 16

Déterminer les relations linéaires liant les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -1, 0, 0), \quad u_2 = (1, 0, -1, 0), \quad u_3 = (1, 0, 0, -1)$$

$$u_4 = (0, 1, -1, 0), \quad u_5 = (0, 1, 0, -1), \quad u_6 = (0, 0, 1, -1)$$

Trouver le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants parmi ces vecteurs.

Exercice 17

Répondre aux questions de l'exercice précédent dans le cas des vecteurs $P_1 = X^3 + 4X^2 - 2X + 3$, $P_2 = 2X^3 + 10X^2 - 3X + 7$ et $P_3 = 2X^3 + 4X^2 - 6X + 4$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 18

Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels engendrés par chacune des 2 familles de vecteurs ci-dessous. Donner en une base et exprimer les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans la base trouvée :

1. $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 3, 4, 5)$, $v_3 = (3, 4, 5, 6)$, $v_4 = (4, 5, 6, 7)$, $v_5 = (5, 6, 7, 8)$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $w_1 = (1, 3, 0, -1)$, $w_2 = (1, 2, 3, 0)$, $w_3 = (0, -1, 0, 4)$, $w_4 = (1, 0, 0, -13)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 19

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs suivante :

$$(1, 1, 0), \quad (1, \alpha, 1), \quad (\alpha, 1, 1)$$

Déterminer en fonction de α le rang de cette famille de vecteurs.

Chapitre 2

Espaces vectoriels

2.1 Espaces vectoriels

2.1.1 Définition

Définition 2.1 (Espace vectoriel). Un K -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur K) est un triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et $\cdot$ est une loi de composition externe

$$K \times E \rightarrow E$$

vérifiant les propriétés suivantes.

Lois internes

— **Commutativité :**

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x + y = y + x$$

— **Associativité :**

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

— **Existence d'un élément neutre :** Il existe $0_E \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad x + 0_E = x$$

— **Existence d'un symétrique :**

$$\forall x \in E, \quad \exists y \in E \text{ tel que } x + y = 0_E$$

Compatibilité avec la loi externe

— **Distributivité sur E :**

$$\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

— **Distributivité sur K :**

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

— **Associativité avec le produit des scalaires :**

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$$

— **Élément neutre :**

$$\forall x \in E, \quad 1_K x = x$$

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. Les éléments de K sont appelés **scalaires**. L'élément neutre pour la loi $+$ est noté 0_E et est appelé **vecteur nul**.

Remarque 2.1. Par abus de langage, on dit simplement que E est un espace vectoriel au lieu du triplet $(E, +, \cdot)$.

Remarque 2.2. On peut définir la notion d'espace vectoriel sur n'importe quel corps K . En pratique, dans les classes préparatoires, on se limite souvent aux cas $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

Théorème 2.1 (Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels). *Soient $E_1, \dots, E_n$ des K -espaces vectoriels ($n \in \mathbb{N}^*$).*

Alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est un K -espace vectoriel avec les lois définies par

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Remarque 2.3. Le vecteur nul de cet espace vectoriel est

$$(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n}).$$

Théorème 2.2 (Espace vectoriel des fonctions). *Soit E un K -espace vectoriel et Ω un ensemble non vide.*

Alors l'ensemble des fonctions de Ω dans E est un espace vectoriel, avec les lois définies par

$$(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$$

et

$$(\lambda f)(\omega) = \lambda f(\omega).$$

Remarque 2.4. Le vecteur nul de cet espace vectoriel est la fonction nulle

$$\omega \mapsto 0_E.$$

Remarque 2.5. Cas particulier : l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E est un espace vectoriel.

2.1.2 Exemples : espaces vectoriels usuels

Les ensembles suivants sont des K -espaces vectoriels :

1. K^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$)
 - $\mathbb{R}^2$ représente l'ensemble des points ou des vecteurs du plan.
 - $\mathbb{R}^3$ représente l'ensemble des points ou des vecteurs de l'espace.
2. $K^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, K)$: K -espace vectoriel des fonctions de Ω dans K (pour Ω ensemble non vide quelconque).
3. $K[X]$: K -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans K .
4. $K_n[X]$: K -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
5. $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ (pour $n, p \in \mathbb{N}^*$) : K -espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.

Remarque 2.6. Un singleton (ensemble à un élément) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel pour lequel les lois sont nécessairement uniques. On dit qu'il s'agit de l'espace vectoriel nul ou **trivial**, qui est réduit à $\{0_E\}$.

2.1.3 Calculs dans un espace vectoriel

Proposition 2.1 (Propriétés de calcul dans un espace vectoriel). *Soient E un K -espace vectoriel, $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in K$. Alors :*

1. $0_K x = 0_E$
2. $\lambda 0_E = 0_E$
3. $(-\lambda)x = -(\lambda x)$
4. $\lambda x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0_K$ ou $x = 0_E$
5. Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda x = \lambda y$ alors $x = y$
6. Si $\lambda x = \mu x$ et $x \neq 0_E$ alors $\lambda = \mu$

Définition 2.2 (Vecteurs colinéaires). Soit E un K -espace vectoriel et soient x et y deux vecteurs de E .

On dit que les vecteurs x et y sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in K$ tel que

$$x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x.$$

Remarque 2.7. 1. Le vecteur nul est colinéaire avec n'importe quel vecteur.

2. Si x et y sont des vecteurs non nuls de E , ils sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que

$$x = \lambda y.$$

Définition 2.3 (Combinaison linéaire). Soient E un K -espace vectoriel et x, y deux vecteurs de E .

Une **combinaison linéaire** de x et y est un vecteur de E de la forme

$$\lambda x + \mu y$$

où $\lambda, \mu \in K$.

Plus généralement, une combinaison linéaire de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est un vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

2.1.4 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Théorème 2.3 (Intersection de sous-espaces vectoriels). *Soit E un K -espace vectoriel et soit I un ensemble non vide. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E .*

Alors

$$\bigcap_{i \in I} F_i$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Cas particulier : intersection finie Si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E ($n \in \mathbb{N}^*$), alors

$$F_1 \cap \dots \cap F_n$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 2.1. Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.4 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie). Soit E un K -espace vectoriel et soit X une partie de E .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par X** , noté

$$\text{Vect}(X),$$

le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant X .

Démonstration de l'existence et de l'unicité L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X est non vide (car E lui-même contient X).

Alors F , défini comme l'intersection de tous ces sous-espaces, est un sous-espace vectoriel de E d'après le théorème précédent, et il est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant X .

Si $X \subset F'$ (avec F' sous-espace vectoriel), alors $F \subset F'$.

Ainsi F est le plus petit sous-espace vectoriel contenant X .

Remarques

1. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient X , alors

$$\text{Vect}(X) \subset F.$$

Cas d'une partie finie Lorsque

$$X = \{x_1, \dots, x_n\},$$

on note aussi

$$\text{Vect}(X) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Théorème 2.4 (Espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs). *Soit E un K -espace vectoriel et soient $x_1, \dots, x_n \in E$ ($n \in \mathbb{N}^*$).*

Alors

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \dots, x_n$:

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\}.$$

Méthode Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, il suffit de trouver des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Exemple 2.2. Montrer que

$$F = \{(x, y, -x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Cas particuliers : droites vectorielles et plans vectoriels

Définition 2.5 (Droite vectorielle). Soit E un K -espace vectoriel. Une **droite vectorielle** de E est un sous-espace vectoriel de E engendré par un vecteur non nul de E .

Dans ce cas,

$$\text{Vect}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in K\}$$

est aussi noté Kx .

Définition 2.6 (Plan vectoriel). Soit E un K -espace vectoriel. Un **plan vectoriel** de E est un sous-espace vectoriel de E engendré par deux vecteurs non colinéaires de E .

2.1.5 Sommes de sous-espaces vectoriels

Remarque 2.8. Une union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.

Exemple 2.3. Soit

$$F = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

L'espace $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.7 (Somme de deux sous-espaces vectoriels). Soit E un K -espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

La somme de F et G , notée $F + G$, est l'ensemble

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}.$$

Proposition 2.2. Soit E un K -espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Plus précisément,

$$F + G = \text{Vect}(F \cup G).$$

Exemple 2.4. Soit

$$F = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

$$F + G = \mathbb{R}^2.$$

Remarque 2.9. Il ne faut pas confondre $F + G$ et $F \cup G$.

1. $F \cup G$ n'est pas toujours un K -espace vectoriel.
2. $F + G$ est toujours un K -espace vectoriel et

$$x \in F + G \iff \exists (u, v) \in F \times G \text{ tel que } x = u + v.$$

2.1.6 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Remarque 2.10. Tout élément x de $F + G$ se décompose sous la forme

$$x = u + v$$

avec $u \in F$ et $v \in G$.

Il n'y a pas toujours unicité de cette décomposition.

Exemple 2.5. Soit

$$F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0)).$$

Le vecteur $(1, 2, 1)$ appartient à $F + G$ avec au moins deux décompositions :

$$(1, 2, 1) = (1, -2, 1) + (0, 4, 0)$$

$$= (-1, 2, -1) + (2, 0, 2).$$

Définition 2.8 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels). Soit E un K -espace vectoriel et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que la somme $F + G$ est **directe** lorsque la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique, c'est-à-dire :

$$\forall w \in F + G, \exists!(u, v) \in F \times G \quad \text{tel que} \quad w = u + v.$$

Dans ce cas, la somme $F + G$ est notée

$$F \oplus G.$$

Remarque 2.11. Pour montrer qu'une somme est directe, on utilise plutôt la caractérisation suivante.

Proposition 2.3 (Caractérisation d'une somme directe). Soit E un K -espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

La somme $F + G$ est directe si et seulement si

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

Exemple 2.6. Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

et

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}.$$

Montrer que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en somme directe.

2.1.7 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.9 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires). Soit E un K -espace vectoriel et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** lorsque tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G , c'est-à-dire

$$\forall w \in E, \exists!(u, v) \in F \times G, \quad w = u + v.$$

Proposition 2.4 (Caractérisation des sous-espaces supplémentaires). *Soit E un K -espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .*

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E = F + G$;
2. la somme $F + G$ est directe.

Autrement dit,

$$E = F \oplus G.$$

Méthodes Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires :

1. on montre que tout vecteur x de E peut s'écrire sous la forme

$$x = u + v$$

avec $u \in F$ et $v \in G$;

2. on montre que

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

Exemple 2.7. Montrer que

$$\text{Vect}(X) \quad \text{et} \quad \left\{ P \in K[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$$

sont supplémentaires dans $K[X]$.

2.2 Familles finies de vecteurs

Une famille finie de vecteurs d'un K -espace vectoriel E est un n -uplet

$$(v_1, \dots, v_n) \in E^n$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2.1 Familles libres et liées

Définition 2.10 (Famille libre, famille liée). Soit E un K -espace vectoriel et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

- On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est **libre** lorsque la combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ est triviale, c'est-à-dire

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

- On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est **liée** lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale des vecteurs qui est nulle :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E.$$

Remarques

1. Une famille contenant le vecteur nul, ou contenant plusieurs fois le même vecteur, est liée.
2. Une sous-famille d'une famille libre est libre. Une famille qui contient une famille liée est liée.

Exemple 2.8. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $(1, 2, 3), (7, 8, 9), (2, 1, 3), (4, -2, -4, -6)$ est liée car

$$(1, 2, 3) + (7, 8, 9) - (2, 1, 3) - (4, -2, -4, 6) = (0, 0, 0).$$

Exemple 2.9. Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, $F_1 = ((1, 4), (2, 7))$.
2. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F_2 = (\cos, \sin)$.
3. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, $F_3 = (X + 5, X - 1, (X - 1)^2)$.
4. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F_4 = (u_n)$ où $u_n = \arctan(n)$.

Exemple 2.10. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, notons e_k le vecteur de K^n dont la k -ième composante vaut 1 et les autres 0. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de K^n est libre.

Exemple 2.11. La famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,p})$ composée des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est libre.

Familles libres dans $\mathbb{C}$ On peut considérer $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ou comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

La famille $(1, i)$ est libre dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et liée dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Proposition 2.5 (Famille de deux vecteurs). *Soit E un K -espace vectoriel et soit (v_1, v_2) une famille de vecteurs de E .*

1. *La famille (v_1) est libre si et seulement si $v_1 \neq 0_E$.*
2. *La famille (v_1, v_2) est libre si et seulement si v_1 et v_2 sont non colinéaires.*

Proposition 2.6 (Famille de polynômes de degrés distincts). *Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes non nuls de $K[X]$ dont les degrés sont deux à deux distincts.*

Alors la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est libre.

Vocabulaire Si la suite des degrés $(\deg(P_1), \dots, \deg(P_n))$ est strictement croissante ou strictement décroissante, on dit que la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est **échelonnée en degré**.

Exemple 2.12. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre dans $K[X]$.

Proposition 2.7 (Unicité des coefficients pour une combinaison linéaire d'une famille libre). *Soit E un K -espace vectoriel et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$).*

Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, alors

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in K^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i \Rightarrow \forall i, \lambda_i = \lambda'_i.$$

Proposition 2.8 (Somme directe d'espaces engendrés par les vecteurs d'une famille libre). *Soit E un K -espace vectoriel, $k \in \mathbb{N}^*$, et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de E .*

Les sous-espaces vectoriels

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) \quad \text{et} \quad \text{Vect}(v_{k+1}, \dots, v_n)$$

sont en somme directe.

Proposition 2.9 (Ajout d'un vecteur à une famille libre). *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre d'un K -espace vectoriel E ($n \in \mathbb{N}$) et soit w un vecteur de E .*

La famille $(v_1, \dots, v_n, w)$ est libre si et seulement si

$$w \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_n).$$

Conséquence Une famille de trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) est libre si et seulement si v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires et v_3 n'appartient pas à $\text{Vect}(v_1, v_2)$.

2.2.2 Familles génératrices

Définition 2.11 (Famille génératrice). Soit E un K -espace vectoriel et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est **génératrice** de E lorsque

$$E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n).$$

Autrement dit, $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n$:

$$\forall v \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Remarques

- Une famille de E qui contient une famille génératrice est encore génératrice.
- Pour une famille infinie, on dit que $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice de E lorsque $E = \text{Vect}((v_i)_{i \in I})$.

Exemple 2.13. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice de K^n .

Exemple 2.14. La famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,p})$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Exemple 2.15. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $K_n[X]$.

Familles génératrices dans $\mathbb{C}$ On peut considérer $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ou comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

- La famille $(1, i)$ est génératrice dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- La famille (1) est génératrice dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

2.2.3 Bases et coordonnées

Définition 2.12 (Base). Soit E un K -espace vectoriel et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une **base** de E lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice de E .

Théorème 2.5 (Caractérisation d'une base et coordonnées dans une base). Soit E un K -espace vectoriel et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur v de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_n$:

$$\forall v \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Dans ce cas, les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** du vecteur v dans la base $(v_1, \dots, v_n)$.

Remarque 2.12. Le caractère générateur fournit l'existence de l'écriture et la liberté fournit l'unicité.

Bases canoniques

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **base canonique** de K^n la base $(e_1, \dots, e_n)$ où, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, e_k est le vecteur dont la k -ième composante vaut 1 et les autres 0.
Dans cette base, les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ sont ses composantes $x_1, \dots, x_n$.
2. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ la base $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.
Dans cette base, les coordonnées d'une matrice $A = (a_{i,j})$ sont ses coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{n,p}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **base canonique** de $K_n[X]$ la base

$$(1, X, X^2, \dots, X^n).$$

Dans cette base, les coordonnées d'un polynôme

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

sont ses coefficients $a_0, \dots, a_n$.

Exemple 2.16. Montrer que la famille

$$((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Puis déterminer les coordonnées du vecteur $(2, -5, 2)$ dans cette base.

2.3 Exercices

Exercice 1

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| = |x|\}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid ax + by = 0\}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$
5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 0\}$
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ et } x + 2z = 0\}$

Exercice 2

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$$

$$D = \{\lambda \cdot (-1, 1, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base (u_1) de D et une base (u_2, u_3) de P .
3. (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
 (b) En déduire que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et que tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de P .

Exercice 3

1. Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices de $\mathbb{R}^2$?
 - (a) (u) , où $u = (-1, 1)$.
 - (b) (u, v) , où $u = (-1, 1)$ et $v = (2, -2)$.
 - (c) (u, v) , où $u = (-1, 1)$ et $v = (2, 1)$.
 - (d) (u, v, w) , où $u = (-1, 1)$, $v = (2, 1)$ et $w = (1, 1)$.
2. Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices de $\mathbb{R}^3$?
 - (a) (u, v) , où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 2)$.
 - (b) (u, v, w) , où $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$.
 - (c) (u, v, w) , où $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (-1, 0, 1)$.
 - (d) (u, v, w) , où $u = (1, 2, 0)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (2, 0, 1)$.
 - (e) (u, v, w, t) , où $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (1, 1, 1)$ et $t = (2, 1, -1)$.

Exercice 4

1. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer des équations cartésiennes des sous-espaces vectoriels engendrés par les familles suivantes :
 - (a) $\{(1, 3)\}$
 - (b) $\{(3, 2), (-4, 1)\}$
 - (c) $\{(-3, 3), (1, 2)\}$
 - (d) $\{(\alpha, \beta)\}$, où $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec la famille :
 - (a) $\{(1, -1, 2)\}$
 - (b) $\{(1, -1, 2), (2, 0, 1)\}$

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, à quelles conditions sur le paramètre réel m la famille (u, v, w) suivante est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. avec $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 3, -1)$ et $w = (1, 1, m)$
2. avec $u = (2 - m, -1, 0)$, $v = (-1, 2 - m, -1)$ et $w = (0, -1, 2 - m)$

Exercice 6

Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel F suivant :

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$

Exercice 7

Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{C}^4$) (u_1, u_2, u_3, u_4) suivante et donner éventuellement une relation entre ces vecteurs :

$$u_1 = (1, 0, 2, 4), \quad u_2 = (3, 2, 0, 1), \quad u_3 = (0, -2, 2, -1) \quad \text{et} \quad u_4 = (1, 0, 1, 1).$$

Exercice 8

Déterminer le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (u_1, u_2, u_3) suivantes (discuter suivant les valeurs des réels α , β et γ) :

1. $u_1 = (\alpha, 1, 1)$, $u_2 = (1, \alpha, 1)$ et $u_3 = (1, 1, \alpha)$
2. $u_1 = (0, \gamma, -\beta)$, $u_2 = (-\gamma, 0, \alpha)$ et $u_3 = (\beta, -\alpha, 0)$

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$$

1. Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de chacun d'eux.
2. Déterminer une base de $F \cap G$ et la compléter en une base de F et en une base de G .

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Applications linéaires

Dans tout le chapitre, m , n et p sont des entiers naturels non nuls.

3.1.1 Définitions et propriétés générales

Définition 3.1 (Application linéaire). Une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction

$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

compatible avec les opérations d'espaces vectoriels, c'est-à-dire telle que :

- $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^p)^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v),$
- $\forall (u, \lambda) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Remarque 3.1. Dans la pratique, on peut montrer qu'une application est linéaire en montrant que

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^p)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Exemple 3.1. Déterminer si les fonctions suivantes sont des applications linéaires.

1. Pour tout réel a , $f : x \mapsto ax$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f_2 : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, 2x - 3y - z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $k \in \{1, \dots, p\}$ et $P_k : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_k$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
4. L'application nulle $f_3 : v \mapsto 0_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.
5. $f_4 : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. $f_5 : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.1 (Propriétés d'une application linéaire). Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

1. $f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

2. Pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, $f(-u) = -f(u)$.
3. L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images avec les mêmes coefficients. Autrement dit,

$$\forall (v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^p)^k, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k,$$

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(v_i).$$

Exemple 3.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$$f(1, 0) = (1, 1, 0), \quad f(0, 1) = (0, 1, -1).$$

Déterminer $f(-2, 3)$.

Définition 3.2 (Endomorphisme). Un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même.

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 3.3. 1. Montrer que

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, x + z)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas bijectif.

2. Montrer que

$$g : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$.

3. Justifier que

$$h : (x, y, z) \mapsto (2x + y, 2y + z)$$

est une application linéaire mais pas un endomorphisme.

3.1.2 Opérations

Proposition 3.2 (Combinaisons linéaires). Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Pour tous réels α et β ,

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n).$$

Proposition 3.3 (Composition). Soient

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n), \quad g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Alors

$$g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m).$$

Exemple 3.4. En reprenant les fonctions de l'exemple précédent, déterminer $h \circ f$.

Proposition 3.4 (Réciproque). Soit f une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$.

Alors f^{-1} est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 3.5. En reprenant les applications de l'exemple précédent, déterminer g^{-1} .

3.2 Noyau, image et rang d'une application linéaire

3.2.1 Noyau et lien avec l'injectivité

Définition 3.3 (Noyau). Soit

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n).$$

L'ensemble

$$\ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

est appelé le **noyau** de f .

Remarque 3.2. 1. Le noyau d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des antécédents de $0_{\mathbb{R}^n}$ par f .

2. Comme $f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour toute application linéaire, $0_{\mathbb{R}^p}$ appartient toujours à $\ker(f)$.

En particulier, $\ker(f)$ n'est jamais vide.

Proposition 3.5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\ker(f)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 3.6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$f \text{ est injective} \iff \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}.$$

Exemple 3.6. 1. Déterminer le noyau de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, x + y - z).$$

Que peut-on en déduire ?

2. Déterminer le noyau de l'application linéaire

$$g : (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 2x - y)$$

de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$h : (x, y) \mapsto (2x + 6y, x + 3y).$$

Que peut-on en déduire ?

3.2.2 Image et lien avec la surjectivité

Définition 3.4 (Image). Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

L'image directe de $\mathbb{R}^p$ par f est

$$\{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^p\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^p, v = f(u)\}.$$

Cet ensemble est appelé **l'image** de f et se note

$$\text{Im}(f).$$

Remarque 3.3. Comme $f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour toute application linéaire, $0_{\mathbb{R}^n}$ appartient toujours à $\text{Im}(f)$. En particulier $\text{Im}(f)$ n'est jamais vide.

Proposition 3.7. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\text{Im}(f)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n.$$

Exemple 3.7. Déterminer dans chaque cas les images des applications linéaires de l'exemple 17. Que peut-on en déduire ?

3.2.3 Rang d'une application linéaire

Définition 3.5 (Rang). Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

On appelle **rang** de f , et on note $\text{rg}(f)$, la dimension de l'image de f , c'est-à-dire

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemple 3.8. Déterminer le rang des applications f , g et h de l'exemple 17.

Remarque 3.4. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ alors $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, donc

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq n.$$

Ainsi

$$\text{rg}(f) \leq n.$$

3.2.4 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 3.1. *Une application linéaire*

$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est entièrement déterminée par l'image d'une base de $\mathbb{R}^p$.

Remarque 3.5. Une autre façon d'énoncer ce théorème est la suivante :

si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ et si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, alors

$$f = g \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, f(e_i) = g(e_i).$$

Exemple 3.9. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tel que

$$f(1, 1, 1) = (1, 0), \quad f(1, 1, 0) = (0, 1), \quad f(1, 0, 0) = (1, 1).$$

Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Proposition 3.9. *Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$, alors*

$$(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

En particulier,

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq p \quad \text{et donc} \quad \text{rg}(f) \leq p.$$

Remarque 3.6. Rien ne garantit que $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ soit libre.

On ne peut donc pas affirmer, en général, qu'il s'agit d'une base de $\text{Im}(f)$.

3.3 Matrice d'une application linéaire

3.3.1 Représentation matricielle d'une famille de vecteurs (rappel)

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** de v dans la base $\mathcal{B}$.

La matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

est appelée la **matrice des coordonnées** de v dans la base $\mathcal{B}$.

3.3.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 3.6 (Matrice d'une application linéaire). Soit

$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

une application linéaire.

Si $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice de la famille

$$(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$$

dans la base $\mathcal{B}_n$ est appelée la **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$** .

On la note

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(f).$$

Il s'agit d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque 3.7. La matrice de f dépend du choix des bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$. En revanche, sa taille est toujours $n \times p$.

Exemple 3.10. 1. On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y, y).$$

Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2. On considère l'application linéaire

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z).$$

Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.7 (Matrice d'un endomorphisme). Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

On appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}_n$** , notée

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(f),$$

la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_n}(f).$$

Exemple 3.11. On considère l'application

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y + z, x + 2y + 4z, x + y + z)$$

1. Justifier que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. On pose

$$e_1 = (1, 1, 0), \quad e_2 = (1, 1, -1), \quad e_3 = (1, 1, 1).$$

Justifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de h dans cette base.

Remarque 3.8. 1. Dans n'importe quelles bases, la matrice de l'application nulle de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est la matrice $0_{n,p}$.

La matrice de l'identité de $\mathbb{R}^n$ est la matrice I_n .

2. Comme une application linéaire

$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est entièrement déterminée par l'image d'une base de $\mathbb{R}^p$, la matrice de f détermine entièrement f .

Proposition 3.10 (admis). Soit $\mathcal{B}_p$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}_n$ une base de $\mathbb{R}^n$.

Le rang de f est égal au rang de la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(f).$$

En particulier, le rang de cette matrice est indépendant du choix des bases de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.12. Déterminer le rang des applications f , g et h définies dans les exemples 34 et 36.

3.4 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

On a vu dans ce qui précède que toute application linéaire entre espaces vectoriels peut être représentée par une matrice à condition de choisir une base dans chaque espace.

Inversement, toute matrice peut être vue comme la matrice d'une application linéaire.

Proposition 3.11. Soit

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Il existe une unique application linéaire

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$$

telle que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ soit la matrice M .

Définition 3.8. Soit

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

L'unique application linéaire définie par la propriété précédente s'appelle **l'application linéaire canoniquement associée à M** .

Exemple 3.13. Déterminer les applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.1 Matrices et opérations

Proposition 3.12. Soient

$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

deux applications linéaires, α et β deux réels et v un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

On considère une base $\mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}^p$ et une base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Si M est la matrice de f dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$, et N est la matrice de g dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$, alors $\alpha M + \beta N$ est la matrice de $\alpha f + \beta g$ dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.
2. Si M est la matrice de f dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$, et N est la matrice de g dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$, alors MN est la matrice de $g \circ f$.

Exemple 3.14. Soit

$$v = (1, -3, 2) \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer la matrice de $h(v)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où h est l'application linéaire de l'exemple 36.

Proposition 3.13. Soient

$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

deux applications linéaires.

On considère une base $\mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}^p$, une base $\mathcal{B}_m$ de $\mathbb{R}^m$ et une base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$.

Si

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_m}(f) \quad \text{et} \quad N = \text{Mat}_{\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n}(g),$$

alors

$$NM = \text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(g \circ f).$$

Exemple 3.15. On considère les applications f et g de l'exemple 34.

Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 3.1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice de $f^{\circ k}$ dans $\mathcal{B}$ est M^k .
2. f est bijective si et seulement si M est inversible, et dans ce cas

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{-1}.$$

Exemple 3.16. On reprend l'application h de l'exemple 36.

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice de h^n dans la base $\mathcal{B}$ de l'exemple 36.
2. (a) Justifier que h est bijectif.
 (b) Déterminer la matrice de h^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
 (c) Déterminer la matrice de h^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3.5 Exercices

Exercice 3.1. Démontrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x + 2y - z$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$$

Exercice 3.2. On considère l'application

$$f : (x, y) \mapsto xy$$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(1, 1)$ et $f(2, 2)$.
2. L'application f est-elle linéaire ?

Exercice 3.3. Montrer que l'application

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z)$$

est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1} .

Exercice 3.4. Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + 2y - z)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - z, 2x + y)$$

Exercice 3.5. 1. Montrer que

$$f : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une base de H .

Exercice 3.6. Déterminer une base de l'espace image de chacune des applications linéaires suivantes, puis en déduire son rang.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y, 2x + 2y)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x + y, x + 2y, y)$$

Exercice 3.7. 1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0), \quad f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

2. Déterminer explicitement f .

3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 3.8. Déterminer les matrices des applications linéaires f et g dans les bases canoniques.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, -2x + z)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (y + z, x + z, x + y)$$

Exercice 3.9. On considère l'application linéaire

$$f : (x, y, z) \mapsto (5x + 5y - 2z, x + 7y - z)$$

de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que

$$\mathcal{B}' = \{(1, -1), (1, 2)\}$$

est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 3.10. On considère l'application linéaire

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (5x + 2y, 3x + y).$$

1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A de h dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que h est bijective et déterminer l'expression de $h^{-1}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.11. On considère l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x - 2y + z}{2}, \frac{y + 2z}{2}, \frac{x + y + z}{2} \right)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire les matrices dans la base canonique de $g = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$ et $h = 2f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 3.12. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la famille

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$$

où

$$e_1 = (1, 0, 1), \quad e_2 = (-1, 1, 0), \quad e_3 = (1, 1, 1).$$

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}'$.

Chapitre 4

Notions sur les polynômes

4.1 Définition et structure algébrique

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On note $\mathcal{F}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 4.1. On appelle *polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$* toute expression formelle

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad a_k \in \mathbb{K}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 4.1. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de base $(1, X, X^2, \dots)$.

Proposition 4.2. Munie du produit défini par

$$\left(\sum a_k X^k\right) \left(\sum b_j X^j\right) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{k+j=m} a_k b_j\right) X^m,$$

l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative unitaire.

Proposition 4.3. Le produit des polynômes est associatif, commutatif et distributif par rapport à l'addition.

4.2 Degré d'un polynôme

Définition 4.2. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. On appelle *degré* de P l'entier $\deg(P) = n$.

On pose $\deg(0) = -\infty$.

Proposition 4.4. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.
2. Si $PQ \neq 0$, alors

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

4.3 Sous-espaces de polynômes

Définition 4.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}.$$

Proposition 4.5. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n + 1$, de base $(1, X, \dots, X^n)$.

—

4.3.1 Division euclidienne

Théorème 4.1 (Division euclidienne). Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B.$$

Définition 4.4. Un polynôme P est dit *divisible* par B si le reste R est nul.

—

4.4 Racines et multiplicité

Définition 4.5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une *racine* de P si

$$P(\alpha) = 0.$$

Proposition 4.6. α est racine de P si et seulement si

$$P(X) = (X - \alpha)Q(X)$$

pour un certain $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Définition 4.6. On dit que α est racine de multiplicité m si

$$P(X) = (X - \alpha)^m Q(X), \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

Proposition 4.7. Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$ (comptées avec multiplicité).

—

4.5 Polynôme d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 4.7. Pour $P(X) = \sum a_k X^k$, on définit

$$P(u) = \sum a_k u^k.$$

Définition 4.8. Un polynôme P est dit *annulateur* de u si

$$P(u) = 0.$$

—

4.6 Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 4.9. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A).$$

Proposition 4.8. χ_A est un polynôme unitaire de degré n .

Proposition 4.9. Les racines de χ_A sont les valeurs propres de A .

Proposition 4.10 (Théorème de Cayley–Hamilton). Toute matrice carrée A vérifie son polynôme caractéristique :

$$\chi_A(A) = 0.$$

4.7 Exercices

Exercice 4.1. Effectuer la division euclidienne de

$$P(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - X + 5$$

par

$$D(X) = X^2 - 1.$$

Déterminer le quotient et le reste.

Exercice 4.2. 1. Montrer que 1 est une racine du polynôme

$$P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2.$$

2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

3. En déduire toutes les racines réelles.

Exercice 4.3. Soit

$$P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X.$$

1. Factoriser P .

2. Déterminer les racines et leurs multiplicités.

3. Étudier le signe de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.4. On considère

$$P(X) = X^4 - 1 \quad \text{et} \quad Q(X) = X^3 - X.$$

1. Calculer le PGCD de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$.

2. En déduire une combinaison linéaire de P et Q égale à leur PGCD.

Exercice 4.5. Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = 5.$$

Exercice 4.6. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$\frac{2X^2 + 3X + 1}{(X - 1)(X^2 + 1)}.$$

Exercice 4.7. Soit

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1.$$

1. Calculer $P'(X)$.
2. Montrer que 1 est une racine multiple de P .
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.8. Soit

$$P(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2.$$

1. Montrer que -1 est une racine de P .
2. En déduire une factorisation de P .
3. Résoudre l'équation $P(X) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.9. On considère

$$P(X) = X^4 + 4.$$

1. Montrer que P n'admet pas de racine réelle.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles.

Exercice 4.10. Soit

$$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X].$$

On suppose que 1 est une racine double de P et que -2 est une racine simple.

1. Déterminer a , b et c .
2. Écrire la factorisation complète de P .
3. Vérifier les résultats à l'aide de la dérivée.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

5.1 Éléments propres

5.1.1 Définitions

Définition 5.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé **valeur propre** de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que

$$u(x) = \lambda x.$$

Un tel vecteur $x \neq 0$ est appelé **vecteur propre** associé à λ .

Le couple (λ, x) est appelé **élément propre** de u .

5.1.2 Sous-espace propre

Définition 5.2. Le **sous-espace propre** associé à λ est

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

On a

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id}_E),$$

donc E_λ est un sous-espace vectoriel de E .

5.2 Cas matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 5.3. Un scalaire λ est une valeur propre de A s'il existe $X \neq 0$ tel que

$$AX = \lambda X.$$

Cela équivaut à

$$(A - \lambda I_n)X = 0.$$

Définition 5.4. Le polynôme

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

est appelé **polynôme caractéristique** de A .

Proposition 5.1. *Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A .*

5.3 Multiplicités

Définition 5.5. La **multiplicité algébrique** d'une valeur propre λ est son ordre comme racine du polynôme caractéristique.

Définition 5.6. La **multiplicité géométrique** de λ est

$$\dim(E_\lambda).$$

Proposition 5.2. *On a toujours*

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \text{multiplicité algébrique}.$$

5.4 Indépendance des vecteurs propres

Proposition 5.3. *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.*

Corollaire 5.1. *Si un endomorphisme admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.*

5.5 Diagonalisation

5.5.1 Définition

Définition 5.7. Un endomorphisme u est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Dans cette base, la matrice de u est diagonale :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

5.5.2 Critère fondamental

Théorème 5.1. *Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda.$$

Autrement dit,

$$\sum_{\lambda} \dim(E_\lambda) = \dim(E).$$

5.5.3 Critère en termes de multiplicités

Théorème 5.2. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si, pour toute valeur propre λ ,*

$$\dim(E_\lambda) = \text{multiplicité algébrique de } \lambda.$$

5.5.4 Formulation matricielle

Théorème 5.3. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que*

$$P^{-1}AP = D,$$

où D est diagonale.

Les colonnes de P sont des vecteurs propres de A .

5.6 Méthode pratique de diagonalisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$.
2. Déterminer les valeurs propres.
3. Pour chaque valeur propre λ , résoudre

$$(A - \lambda I_n)X = 0.$$

4. Vérifier que la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n .
5. Construire P avec les vecteurs propres.
6. Calculer $D = P^{-1}AP$.

5.7 Cas particuliers

5.7.1 Valeurs propres distinctes

Si χ_A possède n racines distinctes dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable.

5.7.2 Cas complexe

Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé. Une matrice complexe est diagonalisable si et seulement si la multiplicité géométrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

5.8 Exercices

Exercice 5.1 (Valeurs propres et diagonalisation). Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de f .
2. Déterminer les sous-espaces propres.
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 5.2 (Endomorphisme diagonalisable). Soit f de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Déterminer les sous-espaces propres.
3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.3 (Diagonalisation complète). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le spectre de A .
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Si oui, déterminer une matrice de passage.

Exercice 5.4 (Polynôme minimal). Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0.$$

1. Déterminer les valeurs propres possibles de A .
2. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.5 (Endomorphisme nilpotent). Soit f de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Déterminer le polynôme minimal.
3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.6 (Sous-espaces propres). Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour polynôme caractéristique

$$\chi_f(X) = (X - 1)^2(X + 2).$$

On suppose que $\dim \ker(f - I) = 2$.

1. f est-il diagonalisable ?
2. Déterminer la structure possible de sa matrice dans une base adaptée.

Exercice 5.7 (Endomorphisme symétrique). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique.
2. Montrer qu'elle est diagonalisable.
3. Diagonaliser A .

Exercice 5.8 (Matrice triangulaire). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres.
2. Calculer les dimensions des sous-espaces propres.
3. Conclure sur la diagonalisation.

Exercice 5.9 (Critère de diagonalisation). Soit f un endomorphisme de dimension finie tel que son polynôme caractéristique soit scindé et que toutes ses racines soient simples.

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Donner un contre-exemple si une racine est multiple.

Exercice 5.10 (Réduction d'un projecteur). Soit p un endomorphisme vérifiant $p^2 = p$.

1. Déterminer les valeurs propres possibles de p .
2. Montrer que p est diagonalisable.
3. Donner la forme de sa matrice dans une base adaptée.

Chapitre 6

Espaces euclidiens

6.1 Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens

6.1.1 Produit scalaire, norme euclidienne

Définition 6.1. Soit E un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E \times E$. Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien. Si $(x, y) \mapsto (x | y)$ est un produit scalaire sur E , la norme euclidienne d'un élément $x \in E$ est $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

Un espace vectoriel réel de dimension infinie muni d'un produit scalaire est couramment appelé espace préhilbertien réel. On notera en général $(x | y)$ le produit scalaire.

Exemple 6.1. — Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$; si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On a bien $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ quand $x \neq 0$.

— La forme bilinéaire symétrique $(A, B) \mapsto \text{trace}(A^t B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, si $A = (a_{i,j})$ n'est pas la matrice nulle, on a $\text{trace}(A^t A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$.

— Soit E l'espace vectoriel réel (de dimension infinie) des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose, pour f et g éléments de E ,

$$(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Ceci définit bien un produit scalaire car si f n'est pas identiquement nulle, on a $\int_0^1 f(t)^2 dt > 0$.

La norme euclidienne associée à un produit scalaire vérifie $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout réel λ . Voici d'autres propriétés.

Proposition 6.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors pour tous x et y de E on a*

$$|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition 6.2 (Inégalité triangulaire). *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors pour tous x et y de E on a*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

L'égalité a lieu si et seulement si $y = 0$ ou s'il existe un réel $t \geq 0$ tel que $x = ty$.

6.1.2 Orthogonalité, base orthonormale

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Dans un espace euclidien E on a donc $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ pour tout sous-espace F . Mais on a mieux :

Proposition 6.3. *Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E . L'orthogonal $F^\perp$ de F pour le produit scalaire est un supplémentaire de F dans E . On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F dans E .*

On reprend la définition de base orthogonale déjà vue pour une forme bilinéaire symétrique et on la complète.

Définition 6.2. Soit E un espace euclidien de dimension n . Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonale quand $(e_i | e_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. Elle est dite orthonormale si en plus $\|e_i\| = 1$ pour $i = 1, \dots, n$. La base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale si et seulement si la matrice du produit scalaire dans cette base est la matrice identité I_n , ou encore si et seulement si le produit scalaire de deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ est donné par $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Un espace euclidien possède toujours une base orthogonale (c'est vrai pour n'importe quelle forme bilinéaire symétrique, en particulier pour le produit scalaire). Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de l'espace euclidien E , on peut en faire une base orthonormale en remplaçant e_i par $\frac{1}{\|e_i\|} e_i$. On obtient donc :

Proposition 6.4. *Tout espace euclidien admet une base orthonormale. Grâce à cette proposition, on voit comment l'étude d'un espace euclidien de dimension n se ramène à celle de $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire usuel.*

On a une façon utile de fabriquer une base orthogonale (ou orthonormale) à partir d'une base quelconque d'un espace euclidien.

Proposition 6.5 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt). *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque d'un espace euclidien E . Alors on peut fabriquer par récurrence une base*

orthogonale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E de la forme

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= e_1 \\ \varepsilon_2 &= e_2 - \lambda_{1,2}\varepsilon_1 \\ &\vdots \\ \varepsilon_i &= e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{j,i}\varepsilon_j \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j,n}\varepsilon_j\end{aligned}$$

en prenant $\lambda_{j,i} = \frac{(\varepsilon_j | e_i)}{\|\varepsilon_j\|^2}$. On a $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

Proposition 6.6. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, et soit F un sous-espace de dimension finie de E . Pour tout $x \in E$, il existe un unique $p_F(x) \in F$ tel que $x - p(x)$ est orthogonal à F . L'application

$$\begin{aligned}p_F : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto p_F(x)\end{aligned}$$

est un endomorphisme linéaire. Cet endomorphisme p_F s'appelle la projection orthogonale sur F .

Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthogonale de F , alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^r \frac{(e_i | x)}{\|e_i\|^2} e_i$$

6.1.3 Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans toute cette section, E est un espace euclidien, $(\cdot | \cdot)$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne.

Définition 6.3. Soit f un endomorphisme de E . Pour tout $x \in E$, il existe un unique $f^*(x) \in E$ tel que, pour tout y de E , on a

$$(f^*(x) | y) = (x | f(y))$$

L'application $f^* : E \rightarrow E$ est un endomorphisme linéaire. Cet endomorphisme f^* s'appelle l'adjoint de f . Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de E , la matrice de f^* dans la base $\mathcal{E}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.

Définition 6.4. Un endomorphisme d'un espace euclidien est dit symétrique (ou autoadjoint) s'il est égal à son adjoint.

Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien E , un endomorphisme de E est symétrique si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est symétrique.

Exemple 6.2. une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

Proposition 6.7. Soit f un endomorphisme de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Pour tous x, y de E , on a $(f(x) | f(y)) = (x | y)$.
- Pour tout x de E , on a $\|f(x)\| = \|x\|$.
- $f^*f = \text{Id}_E$.

Un endomorphisme orthogonal de E est un endomorphisme qui vérifie ces propriétés. Les endomorphismes orthogonaux forment un groupe, appelé le groupe orthogonal de E .

Exemple 6.3. les symétries orthogonales.

Définition 6.5. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tMM = I_n$. Les matrices orthogonales forment un sous-groupe du groupe linéaire, appelé groupe orthogonal et noté $O(n, \mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Alors un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E , et si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est orthogonale.

Proposition 6.8. Les endomorphismes orthogonaux (les matrices orthogonales) ont un déterminant égal à 1 ou -1. Ceux (celles) de déterminant 1 forment un sous-groupe du groupe orthogonal appelé groupe spécial orthogonal. Dans le cas des matrices, on le note $SO(n, \mathbb{R})$.

6.2 Etude des groupes orthogonaux en dimension 2 et 3.

Proposition 6.9. Soit E un plan euclidien.

- Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de E , et f un endomorphisme orthogonal de E de déterminant 1. Alors il existe un réel θ tel que la matrice de f soit $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (rotation d'angle θ).
- Soit f un endomorphisme orthogonal de E de déterminant -1. Alors il existe une base orthonormale (e_1, e_2) de E telle que la matrice de f dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (symétrie orthogonale par rapport à une droite).

Proposition 6.10. Soit E un espace euclidien de dimension 3, f un endomorphisme orthogonal de E . Alors il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E telle que la

matrice de f dans cette base soit $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, où θ est un nombre réel et $\varepsilon = 1$ (resp. -1) si $\det f = 1$ (resp. -1). Dans le cas $\det f = 1$, f est l'identité ou la rotation d'axe la droite engendrée par e_1 et d'angle géométrique θ . Dans le cas $\det f = -1$, c'est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, ou une telle symétrie suivie d'une rotation d'axe perpendiculaire au plan.

Dans le cas d'une rotation f (déterminant 1, différente de l'identité), l'axe est la droite vectorielle propre de f associée à la valeur propre 1, et l'angle géométrique θ de la rotation est déterminé par $1 + 2 \cos(\theta) = \text{trace}(f)$.

6.2.1 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Théorème 6.1. *Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.*

Démonstration. On admet le lemme qui dit qu'un endomorphisme symétrique a ses valeurs propres réelles (ce lemme sera démontré en classe).

On raisonne alors par récurrence sur la dimension n de l'espace euclidien E . Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons alors $n > 1$ et le résultat établi pour un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $n - 1$. Soit λ une valeur propre réelle de f , et $u_n \in E$ un vecteur propre de valeur propre associée λ . On peut supposer u_n de norme 1, quitte à le diviser par sa norme. L'hyperplan $u_n^\perp$ orthogonal de u_n est stable par f . En effet, si x appartient à $u_n^\perp$, alors

$$(f(x) | u_n) = (x | f(u_n)) = (x | \lambda u_n) = \lambda (x | u_n) = 0$$

et donc $f(x)$ appartient aussi à $u_n^\perp$. On peut donc considérer la restriction $f|_{u_n^\perp} : u_n^\perp \rightarrow u_n^\perp$. Le produit scalaire sur E induit une structure d'espace euclidien sur $u_n^\perp$, pour laquelle $f|_{u_n^\perp}$ est un endomorphisme symétrique. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(u_1, \dots, u_{n-1})$ de $u_n^\perp$ formée de vecteurs propres de $f|_{u_n^\perp}$. Alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f . $\square$

En termes de matrices, le théorème se traduit ainsi :

Théorème 6.2. *Soit M une matrice symétrique réelle de taille n . Alors il existe une matrice orthogonale U telle que ${}^tUMU = U^{-1}MU$ soit diagonale.*

On peut tirer quelques conséquences de ce théorème. Si M est une matrice symétrique. Il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale U telle que $D = {}^tUMU = U^{-1}MU$. La matrice D est congruente à M , et donc D et M ont même signature. La signature de D est le couple formé de son nombre de coefficients diagonaux strictement positifs et de son nombre de coefficients diagonaux strictement négatifs. Or les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de M . Par conséquent :

Proposition 6.11. *Soit M une matrice symétrique. La signature de M est égale au couple formé du nombre de ses valeurs propres strictement positives et du nombre de ses valeurs propres strictement négatives (valeurs propres comptées avec multiplicité).*

Exemple 6.4. Considérons la matrice symétrique de taille $n > 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Clairement $M + I_n$ est de rang 1, donc -1 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$. Comme la trace de M est nulle, -1 est valeur propre de multiplicité exactement $n - 1$ et l'autre valeur propre de M est $n - 1$. Donc la signature de M est $((1, n - 1))$.

Proposition 6.12. *Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique sur E . Alors il existe une base orthonormale de E qui est aussi orthogonale pour q .*

Démonstration. $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E et M la matrice de q dans la base $\mathcal{E}$. Il existe une matrice orthogonale U telle que $D = {}^tUMU$ soit diagonale. La matrice U est la matrice de passage à une nouvelle base orthonormale $\mathcal{E}'$ de E . La matrice de q dans la base $\mathcal{E}'$ est D , et donc cette base est aussi orthogonale pour q . $\square$

6.3 Exercices

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, dire si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel E . Si c'est le cas, préciser la norme associée et écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), pour tout $P, Q \in E$:
 - (a) $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$
 - (b) $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P'(x)Q'(x) dx$
 - (c) $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(x)Q'(x) dx$
 - (d) $\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$
 - (e) $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=1}^n P(k)Q(k)$
 - (f) $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$
2. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$), pour tout $A, B \in E$:
 - (a) $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$
 - (b) $\langle A, B \rangle = \det(A^t B)$

Exercice 2

Soit E un espace euclidien, A et B deux parties de E , F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
3. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
4. $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$
5. $(F^\perp)^\perp = F$

Exercice 3

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est injectif et préserve l'orthogonalité : pour tout $x, y \in E$, si $\langle x, y \rangle = 0$ alors $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$.

1. Montrer que pour tout $i \neq j$, $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle = 0$.
2. En déduire que pour tout $i \neq j$, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. On note λ cette valeur commune. Justifier que λ est non nul.
3. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$. On dit que f est une similitude.

Exercice 4

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire suivant : pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$.

À partir de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 5

1. Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p est symétrique.
2. Un exemple. Montrer que la matrice

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'un projecteur orthogonal p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Préciser le noyau et l'image de p .

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im}(A^t)$ et $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker}(A^t)$.
2. Montrer que A et A^t ont même rang.
3. Montrer que $\text{Ker}(A^t A) = \text{Ker } A$.
4. Montrer que $\text{Im}(A^t A) = \text{Im}(A^t)$.

Exercice 7

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique et de la norme associée. On considère le sous-espace vectoriel :

$$G = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 = 0\}$$

1. Déterminer la dimension et une base orthonormée de G .
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, donner une expression explicite de la distance de x à G définie par :

$$d(x, G) = \inf\{\|x - y\|, y \in G\}$$

Exercice 8

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(M, N) \in E^2 \mapsto \langle M, N \rangle = \text{tr}(M^t N)$. On considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Déterminer une base orthonormée de F .
2. Calculer le projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 9

On veut calculer la quantité suivante, en s'assurant d'abord qu'elle est bien définie :

$$\delta = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

1. Déterminer un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un sous-espace vectoriel F et un élément u de E tels que $\delta = d(u, F)^2$ où $d(u, F) = \inf\{\|u - v\|, v \in F\}$.
2. Calculer δ .

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_0^1 H_n(x)P(x) dx = P'(1)$$

2. Calculer H_2 .

Exercice 11

Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes symétriques de E tels que :

$$\operatorname{rg} u_1 + \dots + \operatorname{rg} u_p = n$$

et pour tout $x \in E$, $\langle u_1(x), x \rangle + \dots + \langle u_p(x), x \rangle = \langle x, x \rangle$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Im} u_1 \oplus \dots \oplus \operatorname{Im} u_p$.
2. Montrer que, pour tout $k = 1, \dots, p$, u_k est un projecteur orthogonal.
3. Montrer que les $\operatorname{Im} u_k$ sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. Si p n'est pas un projecteur orthogonal, construire un $x_0 \in E$ tel que $\|p(x_0)\| > \|x_0\|$.

Exercice 13

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée. On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la fonction suivante :

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle Ax, x \rangle$$

1. (a) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et écrire la décomposition correspondante de toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note S_A sa partie symétrique. Montrer que $f_A = f_{S_A}$.
2. Dans la suite de l'exercice, on fixe A une matrice symétrique.

- (a) Montrer que f_A est bornée sur S et atteint ses bornes sur S .
- (b) On note $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ la plus petite et la plus grande valeur propre de A . Montrer que :

$$\lambda_{\min} = \min_{x \in S} f_A(x) \quad \text{et} \quad \lambda_{\max} = \max_{x \in S} f_A(x)$$

- 3. Dans cette question, on suppose de plus que A est définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\langle Ax, x \rangle > 0$.
 - (a) Montrer que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f_A(x) = +\infty$.
 - (b) On note $\Sigma_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_A(x) = 1\}$. Montrer que Σ_A est non vide, fermé et borné dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.
- 4. **Une application.** On définit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1$ et on note $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
 - (a) Soit M la matrice dont les coefficients $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)$ valent 1 et les autres valent 0. Montrer que $h = f_M$, que $M^n = I_n$ et que $M^t = M^{n-1} = M^{-1}$.
 - (b) Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et calculer ses valeurs propres. On note $(v_1, \dots, v_n)$ une base (dans $\mathbb{C}^n$) de vecteurs propres de M .
 - (c) Montrer que pour tout $k = 1, \dots, n$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ obtenu en prenant la partie réelle de v_k est un vecteur propre de $\frac{M+M^t}{2}$ et donner la valeur propre associée.
 - (d) Montrer que h est majorée sur V , qu'elle atteint son maximum sur V et calculer ce maximum.

Bibliographie

- [1] S. Lang, *Linear Algebra*, Springer.
- [2] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Brooks Cole.