

CRMEF Marrakech–Safi
Cycle de préparation à l'agrégation
Département d'informatique

Polycopié

Analyse réel et calcul différentiel

destiné aux agrégatifs
1^{ère} année Informatique

Année universitaire 2025–2026

Ridwane Tahiri

Avant-propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants du cycle de préparation à l'agrégation d'informatique (première année). Il a pour objectif de fournir une synthèse structurée des notions fondamentales d'analyse mathématique nécessaires à cette préparation.

Le document couvre l'essentiel des résultats et des définitions classiques de l'analyse enseignée aux niveaux Licence (L1–L3). Les thèmes abordés incluent notamment les suites et séries, les fonctions réelles, les limites, la continuité, la dérivation ainsi que les principaux résultats d'analyse indispensables à la formation mathématique des agrégatifs.

Le polycopié se conclut par une introduction au calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables, en particulier les fonctions de deux et trois variables, qui constituent un prolongement naturel de l'analyse d'une variable réelle.

Le choix pédagogique adopté dans ce document est volontairement synthétique. On y trouvera essentiellement :

- les définitions fondamentales,
- les théorèmes et résultats essentiels,
- ainsi que des exercices d'entraînement.

Les preuves des résultats, les exemples illustratifs, les applications ainsi que la correction détaillée des exercices seront développés et discutés durant les séances de cours. Ce choix permet de privilégier l'interaction pédagogique en classe et d'encourager la réflexion active des étudiants.

Ce polycopié se veut ainsi un support de travail et de révision, permettant aux étudiants de disposer d'un cadre clair et organisé des notions essentielles d'analyse nécessaires à leur préparation.

Enfin, l'auteur espère que ce polycopié constituera un outil utile tant pour l'apprentissage de l'analyse réel que pour la compréhension de ses nombreuses applications en informatique.

Table des matières

1	Suites et fonctions numériques	7
1.1	Propriétés de $\mathbb{R}$	7
1.2	Suites numériques	9
1.3	Fonctions numériques	13
1.3.1	Définitions	13
1.3.2	Limite d'une fonction	14
1.3.3	Continuité	15
1.4	dérivabilité	17
1.5	Convexité	20
1.6	Développements limités	21
1.6.1	Définitions et propriétés	21
1.6.2	Développements limités généralisés	24
1.6.3	Développements limités au voisinage de l'infini	24
1.7	Exercices de chapitre	25
2	Calcul intégrale	35
2.1	Primitives	35
2.2	Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle	35
2.3	Intégrales généralisées	38
2.4	Exercices de chapitre	40
3	Séries numériques	51
3.1	Généralités	51
3.2	Séries à termes positifs	53
3.3	Comparaison avec une intégrale	55
3.4	Séries alternées	56
3.5	Convolution de séries	57
3.6	Exercices de chapitre	58
4	Calcul différentiel	65
4.1	Fonctions de deux variables à valeurs réelles	65
4.1.1	Exemple mathématique et définition	65
4.1.2	Exemple en physique	65

4.1.3	Représentation graphique	66
4.2	Dérivées partielles	66
4.2.1	Rappel : dérivée d'une fonction	66
4.2.2	Calcul des dérivées partielles	66
4.2.3	Dérivées partielles d'ordre supérieur	66
4.3	Fonction de n variables	67
4.4	Fonctions à valeurs vectorielles	67
4.4.1	Généralisation	68
4.5	Calculs de limites et continuité des fonctions de plusieurs variables	68
4.5.1	Technique de recherche de limites	68
4.6	Notion de différentiabilité	70
4.6.1	Applications linéaires	70
4.6.2	Calcul différentiel	71
4.6.3	Fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$	72
4.6.4	Application différentielle	72
4.6.5	Différentielle	73
4.6.6	Développement limité d'ordre 1	73
4.6.7	Expression de la différentielle	73
4.6.8	Gradient	74
4.6.9	Matrice jacobienne	74
4.6.10	Jacobien	74
4.7	Recherche d'extrema	75
4.7.1	Points critiques	75
4.7.2	Matrice hessienne	75
4.7.3	Caractérisation des extrema	75
4.7.4	Cas de la dimension 2	75
4.8	Exercices de chapitre	76

Chapitre 1

Suites et fonctions numériques

1.1 Propriétés de $\mathbb{R}$

Les notions d'ensembles, les propriétés usuelles des ensembles ainsi que les relations sont supposées connues.

Définition 1.1. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur E .

— On dit que $\mathcal{R}$ est **réflexive** si

$$\forall x \in E, \quad x \mathcal{R} x.$$

— On dit que $\mathcal{R}$ est **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x.$$

— On dit que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y.$$

— On dit que $\mathcal{R}$ est **transitive** si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z.$$

La relation $\mathcal{R}$ est appelée **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 1.2. Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur un ensemble E .

— On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

— Dans ce cas, le couple $(E, \mathcal{R})$ est appelé **ensemble ordonné**.

— Si, de plus,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x,$$

alors on dit que $(E, \mathcal{R})$ est **totalelement ordonné**.

Propriété 1. *L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.*

Définition 1.3. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E .

— Un élément $M \in E$ est appelé **majorant** de F si

$$\forall x \in F, \quad x \leq M.$$

— Un élément $m \in E$ est appelé **minorant** de F si

$$\forall x \in F, \quad m \leq x.$$

— On dit que F est **majoré** s'il admet au moins un majorant.

— On dit que F est **minoré** s'il admet au moins un minorant.

— On dit que F est **borné** s'il est à la fois majoré et minoré.

— S'il existe $q \in F$ tel que

$$\forall x \in F, \quad x \leq q,$$

alors q est appelé **plus grand élément** de F .

— S'il existe $p \in F$ tel que

$$\forall x \in F, \quad p \leq x,$$

alors p est appelé **plus petit élément** de F .

Définition 1.4. Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E .

— On appelle **borne supérieure** de F , notée $\sup(F)$, le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de F .

— On appelle **borne inférieure** de F , notée $\inf(F)$, le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de F .

Propriété 2 (Propriété de la borne supérieure). *Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. De plus,*

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < x_0 \leq M. \end{cases}$$

Propriété 3 (Propriété de la borne inférieure). *Toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure. De plus,*

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad m \leq x, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in A \text{ tel que } m \leq x_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Propriété 4 (Propriété d'Archimède). *Pour tout nombre réel x , il existe un entier naturel n tel que*

$$x < n.$$

Définition 1.5. On appelle **valeur absolue** d'un nombre réel x , notée $|x|$, le réel positif défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriété 5. La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. $|-x| = |x|$.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$.
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.
4. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
5. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Propriété 6 (Formule du binôme). Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

1.2 Suites numériques

Définition 1.6. Une **suite numérique** est une application u définie sur une partie I de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto u(n) = u_n.$$

Le nombre réel $u(n) = u_n$ est appelé **terme général** de la suite. La suite définie par l'application u est notée $(u_n)_{n \in I}$, ou simplement (u_n) lorsque $I = \mathbb{N}$.

L'ensemble

$$\{u(n) ; n \in I\}$$

est appelé **ensemble des valeurs** de la suite.

Définition 1.7. On dit que la suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \rightarrow \ell.$$

Définition 1.8 (Divergence vers $\pm\infty$). On dit que la suite réelle (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_0 \Rightarrow u_n > A.$$

On dit que (u_n) **diverge vers** $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_0 \Rightarrow u_n < -A.$$

Propriété 7. Si une suite est convergente, alors sa limite est **unique**.

Définition 1.9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

- La suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

- La suite (u_n) est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Cela équivaut à dire que

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Suite arithmétique

Définition 1.10. — Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que

$$u_{n+1} - u_n = r \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le nombre réel r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.

- Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un réel q tel que

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le nombre réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique .

Propriété 8. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2.$$

Alors :

1. La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l_1 + l_2.$$

2. La suite produit $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = l_1 l_2.$$

3. La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l_1|$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l_1|.$$

4. Si $l_1 \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \neq 0$, et la suite

$$\left(\frac{1}{u_n} \right)_{n \geq N}$$

converge vers

$$\frac{1}{l_1}.$$

Propriété 9. 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq u_n.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Théorème 1.1 (Théorème des gendarmes). Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

1. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \in \mathbb{R},$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l.$$

2. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

3. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Définition 1.11. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **récurrente (simple)** si elle est définie par un couple (a, f) , où $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction réelle d'une variable réelle, par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Propriété 10. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue et soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad u_0 \in [a, b].$$

1. Si la suite (u_n) converge vers ℓ , alors

$$\ell = f(\ell).$$

2. Si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone et convergente.

Propriété 11. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue et décroissante. Soit $u_0 \in [a, b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors :

— la sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant

$$f \circ f(\ell) = \ell,$$

— la sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant

$$f \circ f(\ell') = \ell'.$$

Propriété 12. Soit (u_n) une suite réelle. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

si et seulement si toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ .

corollaire 1. Soit (u_n) une suite réelle.

- Si elle admet une sous-suite divergente, alors elle diverge.
- Si elle admet deux sous-suites convergeant vers deux limites distinctes, alors elle diverge.

Théorème 1.2 (Bolzano–Weierstrass). Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Définition 1.12. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

1. (u_n) est croissante,
2. (v_n) est décroissante,
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Propriété 13. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

Définition 1.13. Une suite réelle (u_n) est dite **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq n_0, \quad |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

Propriété 14. Soit (u_n) une suite réelle. Alors

$$(u_n) \text{ est de Cauchy} \iff (u_n) \text{ converge.}$$

1.3 Fonctions numériques

1.3.1 Définitions

Définition 1.14. On appelle fonction numérique toute application

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

où $D \subset \mathbb{R}$.

D est appelé domaine de définition de f .

La courbe représentative est

$$C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Définition 1.15. Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- $f \geq g$ si $\forall x \in D, f(x) \geq g(x)$
- $f \geq 0$ si $\forall x \in D, f(x) \geq 0$
- $f > 0$ si $\forall x \in D, f(x) > 0$
- f est constante si $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) = a$
- f est nulle si $\forall x \in D, f(x) = 0$

Définition 1.16. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f est majorée sur D s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in D$$

- f est minorée sur D s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in D$$

- f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition 1.17. Une fonction f est dite paire si

$$f(-x) = f(x).$$

Elle est dite impaire si

$$f(-x) = -f(x).$$

Définition 1.18. Une fonction f est périodique de période $T > 0$ si

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x.$$

1.3.2 Limite d'une fonction

Définition 1.19. Soit f définie sur un voisinage de x_0 .

On dit que f admet pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Définition 1.20. On dit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

Propriétés des limites

Propriété 15. Si f admet une limite ℓ en x_0 , alors cette limite est unique.

Propriété 16. Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell',$$

alors

$$\lim(f + g) = \ell + \ell'$$

$$\lim(\lambda f) = \lambda \ell$$

$$\lim(fg) = \ell \ell'$$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'} \quad (\ell' \neq 0).$$

Remarque 1.1. Les propriétés précédentes ne permettent pas de calculer toutes les limites. Par exemple il n'existe pas d'énoncé général pour le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction qui tend vers l'infini.

Dans ce cas le résultat peut être 0, ∞ , une limite finie ou ne pas exister. On dit alors que $0 \times \infty$ est une forme indéterminée.

Les principales formes indéterminées sont :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty$$

Pour lever ces indéterminations on utilise notamment :

- la transformation de l'expression
- la règle de l'Hôpital
- les fonctions équivalentes
- les développements limités

1.3.3 Continuité

Définition 1.21. Soit f une fonction définie sur un voisinage V de x_0 .

On dit que f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Définition 1.22. Soit f définie sur $[a, b]$.

— f est continue à droite en a si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

— f est continue à gauche en b si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Soit f définie sur D_f et $x_0 \notin D_f$.

Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

on définit

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

Alors g est continue en x_0 .

On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0 .

Propriété 17. Soient f, g continues en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

- $f + g$ est continue en x_0
- λf est continue en x_0

- fg est continue en x_0
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .

Théorème 1.3 (Théorème des valeurs intermédiaires). Soient $a < b$ et f continue sur $[a, b]$.

Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \lambda.$$

corollaire 2. Si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 1.4 (Point fixe). Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est continue, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que

$$f(x_0) = x_0.$$

Théorème 1.5. Toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Il existe donc $x_0, x_1 \in [a, b]$ tels que

$$m = f(x_0) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$M = f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

et

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Définition 1.23. Soit $f : E \rightarrow F$.

- f est injective si

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- f est surjective si

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

- f est bijective si elle est injective et surjective.

Propriété 18. Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, alors il existe une fonction

$$f^{-1} : F \rightarrow E$$

telle que

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = Id_F.$$

Définition 1.24. f est croissante sur I si

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Propriété 19. La composée de deux fonctions monotones est monotone.

Théorème 1.6. Si f est strictement monotone sur I , alors f est injective sur I .

Théorème 1.7 (Théorème de la bijection). Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- f est une bijection de I sur $J = f(I)$
- f^{-1} est continue et strictement monotone sur J

1.4 dérivabilité

Taux d'accroissement

Définition 1.25. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Pour $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in I$, on appelle **taux d'accroissement** de f entre x_0 et $x_0 + h$ le quotient :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dérivabilité

Définition 1.26. La fonction f est dite **dérivable en** x_0 si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Cette limite est appelée **dérivée de f en x_0** et est notée :

$$f'(x_0).$$

Ainsi,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Interprétation géométrique

La dérivée $f'(x_0)$ représente le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 .

L'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Propriété fondamentale

Si une fonction f est dérivable en x_0 , alors elle est **continue** en x_0 .

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continue en } x_0.$$

La réciproque est fautive en général.

Dérivabilité sur un intervalle

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I , on dit que f est **dérivable sur I** .

On définit alors une nouvelle fonction appelée **fonction dérivée** :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Propriété 20. Si f et g sont dérivables en x_0 :

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

si $g(x_0) \neq 0$.

Propriété 21. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Théorème 1.8. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Définition 1.27. Soit I un intervalle ouvert.

Si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I , alors f est dite de classe C^1 sur I .

Définition 1.28. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle ouvert, et soit $p \in \mathbb{N}$. Si les dérivées

$$f', f'', \dots, f^{(p)}$$

existent et si $f^{(p)}$ est continue sur I , on dit que f est de classe C^p sur I . On dit que f est de classe C^∞ sur I si toutes les dérivées $f^{(n)}$ existent et sont continues sur I .

Propriété 22. Si f et g sont de classe C^p , alors $f + g$, fg et, lorsqu'elle a un sens, la composée $f \circ g$ sont aussi de classe C^p .

Théorème 1.9 (Formule de Leibniz). Si f et g sont n fois dérivables en x_0 , alors

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} f^{(n-p)}(x_0) g^{(p)}(x_0).$$

Définition 1.29. Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$. On dit que f possède un maximum local (resp. un minimum local) en un point $x_0 \in I$ s'il existe un voisinage $V(x_0) \subset I$ de x_0 tel que

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)) \quad \text{pour tout } x \in V(x_0).$$

Propriété 23. Soit f dérivable sur $I =]a, b[$. Si f admet un extremum local en un point $x_0 \in I$, alors

$$f'(x_0) = 0.$$

Théorème 1.10 (Théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Théorème 1.11 (Théorème des accroissements finis). Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

corollaire 3. Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Si $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.
2. f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$ sur $]a, b[$.
3. f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si $f'(x) \leq 0$ sur $]a, b[$.
4. Si $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
5. Si $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Théorème 1.12 (Théorème des accroissements finis généralisé). Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Règles de l'Hospital. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, dérivables sur $]a, b[$.

1. Si $f(a) = g(a) = 0$ et si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe (finie ou non), alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$$

et si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe (finie ou non), alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. Si $b = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

et si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe (finie ou non), alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.5 Convexité

Définition 1.30. On dit que f est convexe sur I si pour tous $x_0, x_1 \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_1).$$

On dit que f est concave si l'inégalité est renversée. Si les inégalités sont strictes, on dit que f est strictement convexe (resp. strictement concave).

Propriété 24. Si f est continue et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I , alors :

- f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$;
- f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

1.6 Développements limités

1.6.1 Définitions et propriétés

Définition 1.31. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . On dit que f est un infiniment petit au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Définition 1.32. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . On dit que f est un infiniment grand au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Définition 1.33. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 . On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 s'il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 telle que

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1.$$

On écrit alors

$$f \sim_{x_0} g.$$

Définition 1.34. Si

$$f(x) \sim_{x_0} ax^n,$$

on dit que ax^n est la partie principale de $f(x)$, et que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre n .

Propriété 25. Si f tend vers une limite ℓ en x_0 (finie ou non) et si $f \sim_{x_0} g$, alors g tend aussi vers ℓ en x_0 .

Propriété 26. Si $f_1 \sim_{x_0} f_2$ et $g_1 \sim_{x_0} g_2$, alors

$$f_1 g_1 \sim_{x_0} f_2 g_2 \quad \text{et} \quad \frac{f_1}{g_1} \sim_{x_0} \frac{f_2}{g_2},$$

lorsque les quotients ont un sens.

Théorème 1.13 (Formule de Taylor-Lagrange). Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a, b]$. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c).$$

Théorème 1.14 (Formule de Taylor-Mac-Laurin). Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[0, x]$. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]0, x[$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x).$$

Théorème 1.15 (Formule de Taylor-Young). *Soit f une fonction de classe C^n sur un voisinage de x_0 . Alors pour tout x voisin de x_0 ,*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction définie sur un voisinage de x_0 telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Propriété 27. *Si f est de classe C^{p-1} sur un voisinage de x_0 et admet une dérivée d'ordre p en x_0 , alors x_0 est un zéro d'ordre p de f si et seulement si*

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0.$$

Définition 1.35. Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0, sauf peut-être en 0, et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

de degré inférieur ou égal à n , tel que

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Le polynôme P est appelé partie principale du développement limité de f .

Théorème 1.16. *Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.*

Théorème 1.17. *Si f est de classe C^n sur un voisinage de 0, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Propriété 28. *Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et si f est paire, alors ce développement ne contient que des monômes de degré pair. Si f est impaire, alors ce développement ne contient que des monômes de degré impair.*

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n \varepsilon_1(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x),$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n \varepsilon_2(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

deux développements limités d'ordre n au voisinage de 0.

Alors :

$$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + x^n \varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

De même,

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n \varepsilon(x),$$

et on obtient le développement limité du produit en supprimant dans $P(x)Q(x)$ les monômes de degré strictement supérieur à n .

Proposition 1.1. *Si*

$$f(x) = A(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n \varepsilon(x),$$

et si $B(0) \neq 0$, alors le développement limité de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n est

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n \varepsilon(x),$$

où Q est le quotient à l'ordre n de la division de A par B selon les puissances croissantes.

Si $g(0) = 0$, alors la composée $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, obtenu en ne conservant que les monômes de degré $\leq n$ dans le polynôme $P \circ Q$.

Théorème 1.18. *Si f est dérivable sur un voisinage de 0, et si f' admet un développement limité au voisinage de 0 d'ordre n de partie régulière $p(x)$, alors la fonction f admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 de partie régulière*

$$f(0) + \int_0^x p(t) dt.$$

corollaire 4. *Si f est dérivable en 0 et si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de 0, alors*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x).$$

Conseils de calcul.

1. Toujours développer toutes les fonctions au même ordre.
2. Lorsqu'on calcule un développement limité, disposer clairement les calculs de manière à ne pas oublier de termes lorsque l'on fait des sommes, des composées ou des divisions selon les puissances croissantes.
3. Ne pas écrire les monômes de degré trop grand dont on sait qu'ils n'interviendront pas dans le résultat final.

1.6.2 Développements limités généralisés

Soit f une fonction définie dans un voisinage de 0, sauf peut-être en 0. Si f n'admet pas de limite finie en 0, elle ne peut pas avoir de développement limité en 0. Cependant, il peut exister un entier naturel m tel que

$$g(x) = x^m f(x)$$

admette une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$ et possède un développement limité au voisinage de 0 :

$$x^m f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

On obtient alors

$$f(x) = \frac{1}{x^m} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) + x^{n-m} \varepsilon(x).$$

Cette expression est appelée **développement limité généralisé** de f au voisinage de 0 d'ordre $n - m$.

Remarques pratiques pour les développements limités

1. Toujours développer toutes les fonctions au **même ordre**.
2. Présenter clairement les calculs afin de ne pas oublier de termes lors des sommes, compositions ou divisions.
3. Ne pas écrire les monômes de degré trop élevé qui n'interviennent pas dans le résultat final.

Définition 1.36. Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (sauf peut-être en x_0) et $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n au voisinage de x_0** si

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow x_0$.

1.6.3 Développements limités au voisinage de l'infini

Si f est définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (ou $] -\infty, a]$), on peut se ramener au voisinage de 0 en posant

$$u = \frac{1}{x}.$$

On dira que f admet un **développement limité d'ordre n au voisinage de l'infini** si la fonction

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$$

admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.

Dans ce cas on obtient

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

1.7 Exercices de chapitre

Exercice 1.7.1. En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2},$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{-2^n} = 0,$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(1+n)}{\ln n} = 2,$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty,$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5n-2}{4n} = -\infty,$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln n) = +\infty.$

Exercice 1.7.2. Calculer les limites des suites suivantes de terme général :

1. $U_n = \frac{\cos(2n^2 - 5)}{3n^3 + 2n^2 + 1},$
2. $U_n = \frac{2n^4 - 8n^2}{3n^4 + \cos n + \frac{1}{n^5}},$
3. $U_n = \frac{3^n + (-3)^n}{3^n},$
4. $U_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1},$
5. $U_n = \frac{3^n - 2.5^n + 6.7^n}{7.2^n + 3.4^n + 5.7^n},$
6. $U_n = \frac{e^{2n} - e^{n+1}}{2e^{n+3}},$
7. $U_n = n^\alpha e^{-\beta n}$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_+^*,$
8. $U_n = \frac{n}{2^n}.$

(Indication : en utilisant le binôme de Newton ; montrer que $2^n > \frac{n(n-1)}{2}$.)

Exercice 1.7.3. 1. En utilisant le principe d'encadrement d'une suite, montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l à déterminer dans chaque cas :

$$(a) \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^3 + k},$$

$$(b) \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}},$$

$$(c) \quad U_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

$$2. \text{ Soit } U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3 + |\sin k| \sqrt{k}}, \text{ montrer que}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

Exercice 1.7.4. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0, \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que : $0 \leq U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = 2 - U_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Quel est le signe de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}.$$

- (c) En utilisant un raisonnement par récurrence montrer que :

$$V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- (d) En déduire la limite de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis celle de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 1.7.5. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.

Exercice 1.7.6. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0, \\ U_{n+1} = \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3}, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que $0 \leq U_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier la monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Dédire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.
4. Soit $E = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$; déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice 1.7.7. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 > 0, \\ U_{n+1} = \ln(1 + U_n), \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que $0 < U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. On pose

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

Étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$ puis préciser son signe.

3. En déduire la monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis calculer sa limite.
5. Soit $E = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$; déterminer $\inf E$ et montrer que $\sup E$ est positif.

Exercice 1.7.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$V_n = \frac{U_n}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 1.7.9. On définit deux suites réelles $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\begin{cases} U_1 = 1, \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$\begin{cases} V_1 = 12, \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. On pose $W_n = V_n - U_n$.
Exprimer (W_n) en fonction de n puis calculer sa limite.
2. Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Exercice 1.7.10. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x+1}{1-e^x}$,
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$,
3. $f(x) = \sqrt{x^2-1} \left(e^{\frac{1}{1-x}} \right)$,
4. $f(x) = (1 + \ln x)^{\frac{1}{2}}$,
5. $f(x) = \frac{1}{[x]}$,
- 6.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & x > 1, \\ \ln(x+2), & x \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 1.7.11. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(2x)}{x + \sin(3x)}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$
10. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Exercice 1.7.12. On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} xe^{1/x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f et de g sur leurs domaines de définition.

Exercice 1.7.13. Étudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$,
2. $f(x) = x e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}$,
3. $f(x) = \frac{\sin x}{1-x}$.

Exercice 1.7.14. 1. Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ et que la fonction g ne l'est pas sur $]0, 1]$, où

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

2. Montrer que toute application continue f d'un segment $[a, b]$ dans lui-même admet un point fixe.

Exercice 1.7.15. Montrer que :

1. $\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$
2. $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$

Exercice 1.7.16. Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2},$
2. $(\arctan x)(\arctan x + 2) = 3.$

Exercice 1.7.17. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cosh(\arg \sinh x)$,
2. $\tanh(\arg \sinh x)$,
3. $\sinh(2 \arg \sinh x)$.

Exercice 1.7.18. Déterminer le domaine de définition de la fonction f , puis la simplifier :

$$f(x) = \arg \cosh \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right).$$

Exercice 1.7.19. 1. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en x_0 :

(a)

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1/x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} \arctan x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sign}(x) + \frac{1}{x^2}, & |x| > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad x_0 = -1$$

(c)

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{a^2-x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \quad x_0 = a$$

2. Déterminer les constantes a, b, c, d pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0, \\ cx^2 + dx, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

Exercice 1.7.20. 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- (a) $f_1(x) = \sin(\ln x)$
- (b) $f_2(x) = \ln(\cos(1/x))$
- (c) $f_3(x) = \frac{(\sinh x)^2}{e^x}$
- (d) $f_4(x) = e^{\arctan x}$
- (e) $f_5(x) = \cos(\arcsin x)$
- (f) $f_6(x) = \arctan \left(\frac{2x}{3+x} \right)$

2. Étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \arctan\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Exercice 1.7.21. Calculer les dérivées n -ièmes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (1+x)^\alpha$, pour $\alpha = -1$ et $\alpha = \pm\frac{1}{2}$,
2. $f_2(x) = \ln(1+x)$,
3. $f_3(x) = (x+1)^3 e^{-x}$.

Exercice 1.7.22. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{1/x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine.
3. f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
4. Étudier les variations de f .

Exercice 1.7.23. Soient a, b deux réels strictement positifs et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que :

$$f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2.$$

Montrer que l'équation $f'(x)f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$.

Exercice 1.7.24. Montrer que l'équation suivante admet une solution réelle unique :

$$x^{13} + 7x^3 - 5 = 0.$$

Exercice 1.7.25. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 2]$ et deux fois dérivable sur $]0, 2[$. On suppose que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$. Montrer que :

$$\exists c \in]0, 2[\quad / \quad f''(c) = 0.$$

Exercice 1.7.26. 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}.$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la dérivée de f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a, a + 2\pi]$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que :

$$g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1) = 1.$$

Montrer en utilisant le théorème de Rolle que g'' s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

Exercice 1.7.27. 1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x,$$

$$\forall x > 0, \quad \operatorname{argsh} x + \frac{1}{\sqrt{2+2x+x^2}} < \operatorname{argsh}(x+1) < \operatorname{argsh} x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Étant donné $\ln(100) = 4,6052$, en appliquant le théorème des accroissements finis montrer qu'en écrivant :

$$\ln(101) = 4,6151$$

on commet une erreur inférieure à 10^{-4} .

Exercice 1.7.28. Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital (quand c'est possible) :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1},$
2. $\lim_{x \rightarrow 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}},$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x},$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right].$

Exercice 1.7.29. 1. En utilisant la formule de Taylor–MacLaurin d'ordre n , montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x.$$

2. En utilisant la formule de Taylor–MacLaurin d'ordre 2, montrer que :

$$\frac{8}{3} < e < 3.$$

3. En déduire :

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right] < \frac{3}{(n+1)!}.$$

4. En utilisant la formule de Taylor, montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 1.7.30. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

1. Étudier la fonction $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
2. En déduire que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
4. Quelle propriété de f permet de réduire le domaine d'étude ?
5. Calculer la dérivée $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6. En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$ puis étudier l'existence de points d'inflexion.
7. Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.

Exercice 1.7.31. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$$

et G_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées.
4. Quelle est l'équation de la tangente (T_A) à G_f au point A ?

En déduire que pour tout $x \geq 1$:

$$e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

Exercice 1.7.32. Soit f la fonction définie et continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et dérivable sur $]0, 1[$ avec $f'(0) = f'(1) = 0$.

On considère la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x) - 1}{x - 1} & x \in]0, 1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de g sur $[0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Montrer qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que $f'(\beta) = 1$.

Exercice 1.7.33. 1. Étudier la fonction

$$g(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{2+2x+x^2}.$$

2. En déduire l'étude des variations de

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

3. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ puis tracer son graphe.

Chapitre 2

Calcul intégrale

2.1 Primitives

Définition 2.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

Proposition 2.1. Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I . Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitive de f si et seulement si il existe un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x , $G(x) = F(x) + k$.

Proposition 2.2. Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I . Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive G telle que $G(a) = b$.

Théorème 2.1. Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $x_0 \in [a, b]$. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est la primitive de f qui s'annule en x_0 .

Théorème Si f est une fonction continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, alors elle admet une primitive sur I .

2.2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 2.2. On appelle intégrale de f sur $[a; b]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I . Il est noté

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Proposition 2.3. Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g, \lambda f, |f|$ et fg sont intégrables sur $[a, b]$ et on a :

1. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a, b], \text{ (Relation de Châsles)}$
4. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$
6. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$

Proposition 2.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)$$

Théorème 2.2. Si f est une fonction bornée sur $[a, b]$ et continue, sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$. En particulier, si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Proposition 2.5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$. S'il existe des réels m, M et k tels que pour tout $x \in [a, b]$, on ait :

- $m \leq f(x) \leq M, \quad \text{alors} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$
- $|f| \leq k, \quad \text{alors} \quad \int_a^b |f(x)|dx \leq k(b-a).$

Définition 2.3. Soit f une fonction continue sur $[a, b], (a \neq b)$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre réel μ_f défini par

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Proposition 2.6. Soit f une fonction continue sur $[a, b], (a \neq b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Cette relation est appelée Formule de la moyenne.

Théorème 2.3 (Inégalité des accroissements finis). Soit f une fonction dont la dérivée f' est dérivable sur un intervalle $[a, b]$. S'il existe trois réels m, M et k tels que, pour tout x de $[a, b]$, on ait

- $m \leq f'(x) \leq M \quad \text{alors} \quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$
- $|f'(x)| \leq k \quad \text{alors} \quad |f(b) - f(a)| \leq k(b-a).$

Théorème 2.4 (Théorème fondamental de l'intégration). Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Théorème 2.5. Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Théorème 2.6. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $\phi : J \rightarrow I$ une application bijective d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle I , tels que ϕ et ϕ^{-1} soient continûment dérivables. On a alors

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

Définition 2.4. On appelle fraction rationnelle réelle toute fonction f de la forme : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.

Définition 2.5. Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes réels. On appelle division euclidienne (ou division selon les puissances décroissantes) de $A(x)$ par $B(x)$ l'unique couple (Q, R) tel que : $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ avec $R = 0$ ou bien $d^0 R < d^0 B$, ($d^0 = \text{degré}$). Les polynômes Q et R sont appelés respectivement quotient et reste.

Proposition 2.7. Tout polynôme non nul $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $P(x) = c(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \dots (x - r_p)^{m_p}(x^2 + b_1x + c_1)^{n_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{n_2} \dots (x^2 + b_qx + c_q)^{n_q}$

$$P(x) = c(\Pi_{k=1}^p (x - r_k)^{m_k})(\Pi_{k=1}^q (x^2 + b_kx + c_k)^{n_k})$$

avec $b_q^2 - 4c_q < 0, m_k, n_k \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $c \neq 0$.

Proposition 2.8 (Décomposition en éléments simples). Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle telle que $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont aucune racine commune. Si

$$Q(x) = c\Pi_{k=1}^p (x - r_k)^{m_k} \Pi_{k=1}^q (x^2 + b_kx + c_k)^{n_k}$$

avec $b_k^2 - 4c_k < 0$ et $c \neq 0$ alors la décomposition en éléments simples de $f(x)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$f(x) = E(x) + \sum_{1 \leq i \leq p} \sum_{1 \leq j \leq m_i} \frac{A_{i,j}}{(x - r_i)^j} + \sum_{1 \leq i \leq q} \sum_{1 \leq j \leq n_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j}$$

où $A_{i,j}, B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes réelles, et $E(x)$ est un polynôme appelé partie entière de la fraction rationnelle $f(x)$.

Proposition 2.9. Si f est intégrable sur $[a, b]$, la suite (S_n) définie par

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

tend vers $\int_a^b f(x)dx$ quand n tend vers $+\infty$.

2.3 Intégrales généralisées

Définition 2.6. Soit f une fonction réelle définie sur $]a, b[$. On dit que f est localement intégrable sur $]a, b[$ si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$.

Définition 2.7. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x < b$$

admet une limite finie quand x tend vers b ; et on pose par définition

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$$

Si cette limite n'existe pas on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est divergente. De même si f est continue sur $]a, b]$, $(-\infty \leq a < b < +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^b f(t)dt, \quad a < x \leq b$$

admet une limite finie quand x tend vers a ; et on pose par définition

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t)dt$$

Si cette limite n'existe pas on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est divergente.

Définition 2.8. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a, b]$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, et soit $c \in]a, b[$ on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si les intégrales

$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)dt$$

sont convergentes et on pose alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx$ est indépendante du choix du point c .

Proposition 2.10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge pour $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.
- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Proposition 2.11. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ localement intégrable. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si l'ensemble $\{\int_a^x f(t)dt; x \in [a, b[\}$ est majoré ; dans ce cas

$$\int_a^b f(t)dt = \sup_{x \in [a, b[} \int_a^x f(t)dt. \quad (2.1)$$

Proposition 2.12 (Critère de Comparaison). Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que $\forall t \in [c, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors :

- $\int_a^b g(t)dt$ convergente $\implies \int_a^b f(t)dt$ convergente.
- $\int_a^b f(t)dt$ divergente $\implies \int_a^b g(t)dt$ divergente.

Théorème 2.7. Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.

Proposition 2.13 (Critère d'équivalence). Soit $I = [a, b[, (-\infty < a < b \leq +\infty)$. Soit f et g deux fonctions continues, positives sur I . Si f et g sont équivalentes au voisinage de b ; $f \sim_b g$, alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t)dt$$

sont de même nature. Ce résultat reste valable si on remplace l'hypothèse $\ll f$ et g positives $\gg$ par $\ll f$ et g ont un signe constant au voisinage de $b \gg$.

Théorème 2.8. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application localement intégrable. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si f vérifie la condition suivante, dite critère de Cauchy : $\forall \epsilon > 0 \exists c \in [a, b[$ tel que $\forall x_1, x_2 \in [c, b[$ on a $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \leq \epsilon$.

Définition 2.9. Soit $I =]a, b[, (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et f une fonction continue sur I . On dit que l'intégrale de f sur I est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

Proposition 2.14. Soit $I =]a, b[, (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et f une fonction continue sur I . S'il existe une fonction g continue sur I telle que

$$\begin{cases} 0 \leq |f| \leq g & \text{sur } I \\ \int_a^b g(t)dt & \text{converge} \end{cases}$$

alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Proposition 2.15. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow a} (t - a)^\alpha f(t) = k \in \mathbb{R}$$

- Si $\alpha < 1$ l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente. - Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Proposition 2.16. Soient $a \in \mathbb{R}$, f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = k \in \mathbb{R}$$

- Si $\alpha > 1$ l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente. - Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

Définition 2.10. Une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Théorème 2.9 (d'Abel). Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x g(t)dt$ soit bornée. Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt \quad \text{converge.}$$

2.4 Exercices de chapitre

Exercice 2.4.1. (Propriétés de base des intégrales). Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre-exemple) ? Si vous répondez faux essayez, lorsque c'est possible, de réparer l'énoncé pour qu'il devienne correct (en rajoutant une hypothèse par exemple).

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\int_0^b f(t) dt \geq 0$ pour tout $b \in [0, 1]$ alors $f \geq 0$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est croissante alors f est positive.

3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \leq 1$ alors

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt.$$

4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = 0,$$

alors f est nulle.

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Exercice 2.4.2. (Révisions de méthodes de calcul d'intégrales).

1. Calculer les intégrales suivantes :

- (a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$ (à l'aide d'une primitive),
- (b) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (à l'aide d'un changement de variables),
- (c) $\int_0^\pi x \sin(x) dx$ (à l'aide d'une intégration par parties),
- (d) $\int_0^1 \frac{4}{x^2-4} dx$ (à l'aide d'une décomposition en éléments simples).

2. Déterminer une primitive des fonctions réelles suivantes :

- (a) $x \mapsto xe^x$,
- (b) $x \mapsto x \cos(x^2)$,
- (c) $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

Exercice 2.4.3. (Limite d'une série). Soit $x \in [0, 1[$ fixé.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

3. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}.$$

Exercice 2.4.4. (Première formule de la moyenne)

Soit f une fonction continue au voisinage de 0. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt = \frac{f(0)}{2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln(2).$$

Exercice 2.4.5. (Lemme de Riemann-Lebesgue)

1. Montrer que pour toute fonction en escalier $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

2. En déduire le résultat pour toute fonction intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 2.4.6. (Sommes de Riemann)

1. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = e^x$$

sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ puis calculer

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 g(x) dx.$$

2. Calculer les limites des suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \sqrt{\frac{k}{2n+k}},$$

$$v_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right) \right)^{1/n},$$

$$w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k}),$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Exercice 2.4.7. 1. En utilisant l'intégration par parties, calculer :

$$A = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt, \quad B = \int_0^\pi e^t \cos(2t) dt.$$

2. En utilisant l'intégration par changement de variable, déterminer les primitives suivantes :

$$E(x) = \int \frac{dx}{x(\ln^2(x) - 4)},$$

$$F(x) = \int \frac{\sin(x) dx}{(\cos^2 x + 2 \cos x + 5)^2},$$

$$G(x) = \int \frac{e^{3x} + 6e^{2x} - e^x}{(e^x - 3)^2(e^x - 1)} dx.$$

Exercice 2.4.8. (Intégrale de Wallis)

Soit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

1. Montrer que $I_n = J_n$.
2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
3. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} .
4. Montrer que

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$$

pour tout entier n .

5. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

et en déduire qu'au voisinage de l'infini

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 2.4.9. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2}} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie et impaire.
2. Montrer que

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $f(x) \leq \ln(2)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire que f admet une limite finie à droite en 0.

Exercice 2.4.10. 1. Prouver que si f est de classe C^1 sur $[0, 1]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

2. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right), \quad k \geq 0.$$

3. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$. Prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \right] = \frac{f'(1) - f'(0)}{24}.$$

4. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \dots + \frac{2}{4n-1} - \ln 2 \right) = -\frac{1}{32}.$$

Exercice 2.4.11. (Facultatif)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe deux suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$:

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(x) dx = 0.$$

Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(x) dx.$$

Exercice 2.4.12. (Facultatif)

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($f([0, 1]) \subset E \subset \mathbb{R}$) une fonction k -lipschitzienne. Montrer que la fonction composée $g \circ f$ est intégrable sur $[0, 1]$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Montrer que $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 2.4.13. (Facultatif)

Calculer la limite des suites de terme général suivant :

$$u_n = n^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}, \quad v_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2},$$

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-k/n}, \quad x_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n},$$

$$y_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{1/n}.$$

Exercice 2.4.14. (Facultatif)

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + x}{(x-1)^3(x^2 - x + 1)^2} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}},$$

$$\int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}} dx,$$

$$\int \tan x \, dx,$$

$$\int \frac{1}{\cos^4 x} dx,$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx,$$

$$\int \frac{dx}{5 \cosh x + 3 \sinh x + 4},$$

$$\int \frac{\cosh x}{2 \cosh x + \sinh x} dx,$$

$$\int \frac{\cosh x - e^x}{\cosh x + 1} dx,$$

$$\int \frac{dx}{1 + \tanh x},$$

$$\int x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \, dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} dx.$$

Exercice 2.4.15. (Facultatif)

Soit F la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

1. Calculer $F'(x)$.
2. Calculer $F(0)$ et montrer que F est impaire.
3. Étudier les variations de F .
4. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

5. Calculer le développement limité de F en 0 à l'ordre 3 et dessiner la courbe de F .

Exercice 2.4.16. (Facultatif)

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n e^{-nx} dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/3} \frac{\cos t}{t} dt,$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{1/R} e^{-R \sin x} dx.$$

2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{x+n} dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx.$$

Exercice 2.4.17. Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} dt.$$

Exercice 2.4.18. Les intégrales généralisées suivantes convergent-elles ou divergent-elles ?

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \ln(t) dt, \quad I_2 = \int_0^2 \ln(t) dt, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-4t} dt,$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4 + 1)\sqrt{t}} dt,$$

$$I_6 = \int_0^\pi \ln(\sin t) dt, \quad I_7 = \int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt,$$

$$I_8 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt, \quad I_9 = \int_{\pi/2}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt.$$

Exercice 2.4.19. 1. Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt.$$

Calculer $F(x)$.

2. En déduire que l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$$

est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 2.4.20. 1. Calculer

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt.$$

2. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$, montrer avec les règles de Riemann que

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$$

converge.

3. Calculer

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt.$$

Exercice 2.4.21. Étudier la convergence des intégrales :

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}, \quad I_2 = \int_3^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2 + 2t + 7} dt.$$

Exercice 2.4.22. Soient a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs de la convergence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b}.$$

On pourra :

1. lorsque $a \neq 1$, utiliser les règles de Riemann ;
2. lorsque $a = 1$, calculer explicitement

$$\int_2^A \frac{dt}{t(\ln t)^b}$$

pour $A \rightarrow +\infty$.

Exercice 2.4.23. 1. Soit $a > 0$. Montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{a+1}} dt$$

converge.

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^a} dt$$

converge.

2. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$$

diverge.

En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

diverge.

Vérifier quand $t \rightarrow +\infty$ que

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \sim \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{t}.$$

Exercice 2.4.24. 1. Démontrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx.$$

2. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1.$$

3. Pour $x \in]0, 1]$, démontrer

$$\int_0^x \frac{x \, dx}{\ln x} = \int_0^{x^2} \frac{dx}{\ln x}.$$

4. En déduire un encadrement de

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \, dx$$

et montrer que

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \, dx = \ln(2).$$

Exercice 2.4.25. Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives définies sur un même intervalle $[a, b[$.

On sait que les deux intégrales

$$\int_a^b f(t) \, dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t) \, dt$$

sont de même nature.

Montrer que si ces intégrales convergent, alors

$$\int_x^b f(t) \, dt \quad \text{et} \quad \int_x^b g(t) \, dt$$

sont équivalentes lorsque $x \rightarrow b^-$.

Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Généralités

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. On définit les sommes partielles par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

et on s'intéresse à la limite de S_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 3.1. On dira que la série $\sum u_n$ est :

- **convergente (CV)** si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe. On note alors cette limite $\sum_{n \geq 0} u_n$.
- **divergente (DIV)** sinon.
- **absolument convergente (AC)** si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

On dira aussi que la série converge **simplement (CS)** si elle converge mais pas absolument.

On peut définir de même la notion de convergence de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ si u_n n'est définie qu'à partir d'un certain rang p :

$$\sum_{n \geq n_0} u_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots$$

La modification d'un nombre fini de termes d'une série ne change pas sa nature (CV, AC, DIV, CS).

Théorème 3.1 (Critère de Cauchy). *Pour toute série à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,*

$$\left(\sum u_n \right) \text{ AC} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum u_n \right) \text{ CV}.$$

Série géométrique. Soit $u_n = c a^n$ avec $c \neq 0$. La série $\sum u_n$ est convergente si $|a| < 1$ et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} c a^n = \frac{c}{1-a}.$$

La somme partielle est, pour $a \neq 1$,

$$S_n = c \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Série télescopique. Soit $u_n = a_n - a_{n+1}$. La somme partielle vaut

$$S_n = a_0 - a_{n+1}.$$

La série converge si et seulement si $\lim a_n$ existe, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = a_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Exemple 3.1. Pour

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1,$$

on a

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1.$$

Proposition 3.1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors

$$u_n \longrightarrow 0.$$

Démonstration. On remarque que

$$u_n = S_n - S_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

□

Exemple 3.2. Pour $u_n = \frac{1}{n}$, on a $u_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ mais

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

est divergente.

3.2 Séries à termes positifs

Dans cette section on suppose que $u_n \geq 0$.

Théorème 3.2. *Soit $u_n \geq 0$. Alors*

$$\sum u_n \text{ CV} \iff \sum u_n \text{ bornée.}$$

Définition 3.2. Pour u_n, v_n suites à valeurs complexes, t.q. $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang), on utilisera la notation $u_n \sim v_n$, et on dira que u_n est équivalent à v_n quand $n \rightarrow \infty$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Théorème 3.3 (Comparaison). *On suppose $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.*

— *Si $0 < u_n < v_n$, alors*

$$\sum u_n \text{ CV} \Rightarrow \sum v_n \text{ CV.}$$

— *Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Exercice On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell, \quad \ell > 0.$$

Montrer, à partir du résultat précédent, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \ell.$$

(Note : ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Cesàro*.)

Proposition 3.2 (Règle d'Alembert). *On suppose $u_n > 0$ et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

— *Si $\ell < 1$, la série converge.*

— *Si $\ell > 1$, la série diverge.*

— *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.*

Démonstration. On suppose $\ell < 1$. Soit ρ tel que $\ell < \rho < 1$. Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell,$$

il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \rho.$$

Donc pour $n \geq n_0$,

$$u_n \leq \rho u_{n-1} \leq \rho^2 u_{n-2} \leq \dots \leq \rho^{n-n_0} u_{n_0} = C \rho^n$$

avec $C = \frac{u_{n_0}}{\rho^{n_0}}$.

Par comparaison avec une série géométrique convergente, on en déduit la convergence de la série.

Le cas $\ell > 1$ se traite de manière analogue en minorant la suite u_n par une suite géométrique à somme divergente. $\square$

On verra plus loin des exemples de type

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

(série de Riemann), avec une limite $\ell = 1$ mais où la série peut être convergente (si $\alpha > 1$) ou divergente (si $\alpha \leq 1$).

Exemple 3.3. Étudier la série de terme général

$$u_n = n^\alpha e^{-n}, \quad n \geq 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On montre que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Donc $u_n \rightarrow 0$ et par la règle de d'Alembert la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On pourra démontrer à titre d'exercice, de manière analogue, le résultat suivant.

Proposition 3.3 (Règle d'Alembert, variante). *On suppose $u_n > 0$.*

— Si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell$$

à partir d'un certain rang, avec $\ell < 1$, la série converge.

— Si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell$$

avec $\ell > 1$ à partir d'un certain rang, la série diverge.

De manière analogue à la règle d'Alembert, on démontre la proposition suivante :

Proposition 3.4 (Règle de Cauchy). *On suppose $u_n \geq 0$ et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

— Si $\ell < 1$, la série converge.

— Si $\ell > 1$, la série diverge.

— Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

3.3 Comparaison avec une intégrale

Supposons $u_n = f(n)$, avec f décroissante. Alors

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq u_n \leq \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

D'où, par exemple :

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq u_1 + \int_1^n f(t) dt.$$

Théorème 3.4. Si $u_n = f(n)$ pour $n \geq a$, avec $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante, alors

$$\sum_{n \geq 1} u_n \text{ CV} \iff \int_a^\infty f(t) dt \text{ CV}.$$

Corollaire 3.1 (Séries de Riemann).

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV} \iff \alpha > 1.$$

Séries de Bertrand

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \text{ CV} \iff (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

À titre d'exemple, on pourra démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.5. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, décroissante, positive. Alors

$$u_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$$

converge quand $n \rightarrow +\infty$.

(On pourra vérifier que u_n est décroissante et minorée.)

Application Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log(n) + \gamma + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

La constante γ est appelée **constante d'Euler**.

3.4 Séries alternées

On appelle série alternée toute série $(\sum u_n)$ de la forme

$$u_n = (-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0.$$

Théorème 3.5 (Séries alternées). *On suppose que $\sum u_n$ est une série alternée :*

$$u_n = (-1)^n a_n, \quad \forall n \geq 0,$$

avec

$$a_n \geq 0, \quad a_n \searrow, \quad \lim a_n = 0.$$

On note

$$S = \sum_{k \geq 0} u_k$$

la somme de la série (si elle existe),

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

les sommes partielles et

$$R_n = \sum_{k \geq n} u_k$$

le reste de la série.

Alors :

- La série de terme général u_n converge (donc S et R_n sont bien définis).
- S_{2n} est décroissante, S_{2n+1} croissante et

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, \quad \forall n.$$

- Le reste R_n est de même signe que $(-1)^n$ et

$$|R_n| = |a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - \cdots| \leq a_n, \quad \forall n.$$

Attention Une série peut être alternée à partir d'un certain rang (ou définie à partir d'un certain rang).

Par exemple

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

avec (a_n) décroissante vers 0.

Le résultat de convergence s'applique encore car cela revient à modifier un nombre fini de termes par rapport à une série alternée définie à partir du rang $n = 0$ par exemple. Ainsi

$$|R_n| \leq a_n,$$

mais les autres inégalités peuvent être décalées.

Exemple

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

3.5 Convolution de séries

Définition 3.3. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de terme général $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

On appelle **série convolée** de $\sum a_n$ par $\sum b_n$ (ou **série produit**), la série de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

(On note parfois $c = a * b$.)

Théorème 3.6. 1. Si $a_n, b_n \geq 0$ et si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, alors $\sum c_n$ converge et

$$\sum c_n = \left(\sum a_n \right) \left(\sum b_n \right).$$

2. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum c_n$ est absolument convergente et

$$\sum |c_n| \leq \left(\sum |a_n| \right) \left(\sum |b_n| \right),$$

et on a encore

$$\sum c_n = \left(\sum a_n \right) \left(\sum b_n \right).$$

Théorème 3.7 (La fonction exponentielle complexe). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

1. La série est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. Pour tout $y, z \in \mathbb{C}$:

$$e^{y+z} = e^y e^z.$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|e^z| \leq e^{|z|}.$$

4. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|e^{iy}| = 1, \quad e^{x+y} = e^x e^y > 0.$$

On peut alors définir

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}), \quad \sin(x) = \Im(e^{ix})$$

et retrouver les formules classiques de trigonométrie.

Le nombre π peut être défini comme le plus petit réel strictement positif tel que

$$\cos(\pi/2) = 0.$$

3.6 Exercices de chapitre

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser

- Définition d'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Somme partielle S_n . Nature (convergente/divergente), somme

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n,$$

reste

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Série absolument convergente.

- Connaître les propriétés des séries convergentes : le terme général u_n tend vers 0, le reste tend vers 0, somme et multiples de séries convergentes.
- Savoir prouver correctement la convergence d'une série : critère de convergence des séries à termes positifs, propriétés des séries absolument convergentes, encadrement de séries à termes positifs, critère de comparaison série-intégrale, séries à termes généraux équivalents, méthode des croissances comparées, méthode de l'inégalité de Taylor–Lagrange.
- Connaître les exemples de référence (définition, nature, somme) :

$$\text{série géométrique } \sum_{n \geq 0} q^n,$$

$$\text{série télescopique } \sum_{n \geq 0} (v_{n+1} - v_n),$$

série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$,

séries de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$,

série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$,

série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

— Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu’une série

$$\sum u_n$$

est convergente ou divergente (comparaison, équivalent).

— Savoir déterminer la somme d’une série à partir des séries de référence, ou avec l’inégalité de Taylor–Lagrange.

— Savoir effectuer un calcul de somme de série dans un cas simple ou classique.

Exercice 3.6.1. Montrer que

$$\sum \frac{(-3)^n}{7^n}$$

converge et calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-3)^k}{7^k}.$$

Exercice 3.6.2. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 3.6.3. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = (3n+1) \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 3.6.4. Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = e^{-n^2}$,
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^5 + 1}}$,

$$3. \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n \ln(n)}}.$$

Exercice 3.6.5. Montrer que la série double

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^{i+j}}$$

converge et calculer

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}}.$$

Exercice 3.6.6. 1. Étudier la nature des séries suivantes en calculant la somme en cas de convergence :

$$(a) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$(b) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

2. Étudier la nature des séries suivantes en utilisant la condition nécessaire de la convergence :

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)^2.$$

3. Dédurre la limite du terme général U_n des séries suivantes si c'est possible :

$$(a) \quad \text{La série } \sum_{n \geq 1} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) \text{ est convergente,}$$

$$(b) \quad \text{La série } \sum_{n \geq 0} \cos n \text{ est divergente.}$$

Exercice 3.6.7. Donner la nature des séries suivantes :

$$1. \quad \sum_{n \geq 0} \frac{5^n + (-2)^n}{10^n},$$

$$2. \quad \sum_{n \geq 0} \cos n,$$

$$3. \quad \sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^{2n}},$$

$$4. \quad \sum_{n \geq 1} n e^{-n^2},$$

5. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \ln(n)},$
6. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(\log n)^4},$
7. $\sum_{n \geq 0} 2^n,$
8. $\sum_{n=3}^{+\infty} 3^{-n+2} + 2^{-n+3},$
9. $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-2n}),$
10. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sin^2(n)},$
11. $\sum_{n \geq 0} \frac{1 + \sqrt{n}}{n^2 + 3}.$

Exercice 3.6.8. En utilisant le critère de Cauchy et le critère d'Alembert, donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!},$
2. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2n+1}{3n+4} \right)^n,$
3. $\sum_{n \geq 2} (\ln n)^{-n},$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n},$
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!},$
6. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{(n+1)!}.$

Exercice 3.6.9. Dans chaque cas, étudier la nature de la série de terme général u_n :

(Qa) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n,$

(Qb) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2},$

(Qc) $u_n = \sqrt{\frac{\text{sh}(\frac{1}{n})}{\text{ch}(\frac{1}{n})}} - 1,$

$$(Qd) \quad u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{n^2 + \cos^2(x)} dx,$$

$$(Qe) \quad u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+x^2} dx,$$

$$(Qf) \quad u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2(n+1)^2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]},$$

$$(Qg) \quad u_n = \frac{n^n}{e^n}.$$

Exercice 3.6.10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} (\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$$

en fonction des réels a et b . Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 3.6.11. Soit

$$u_n = \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} + n}.$$

Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 3.6.12. Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 \in]0, \pi[$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \pi$ et étudier la nature de $(u_n)_{n \geq 0}$.
2. Rappeler le théorème sur les séries télescopiques.
3. En déduire que la série

$$\sum \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

diverge.

4. Montrer que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2).$$

5. De ces deux questions, en déduire la nature de $\sum u_n^2$ puis de $\sum u_n$.

Exercice 3.6.13. (Critère des séries alternées) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. On considère la série de terme général $(-1)^{k-1} u_k$ et on note sa somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k.$$

1. En étudiant les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ et $(S_{2n-1})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, démontrer que la série de terme général $(-1)^{k-1} u_k$ converge et que sa somme, notée S , vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}.$$

2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a :

$$|S - S_n| \leq u_n.$$

3. On admet que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

converge vers $\ln(2)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un entier naturel N_p tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} pour tout $n \geq N_p$.

Exercice 3.6.14. 1. Montrer que ces sommes existent :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right).$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\arctan(x+1) - \arctan(x-1) = \arctan\left(\frac{2}{x^2}\right).$$

3. En déduire S et T .

4. En déduire la valeur de

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

Exercice 3.6.15. Vers le critère de Raabe-Duhamel. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_n > 0$, $\forall n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n-1}{3n}.$$

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$. Montrer que $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.
2. En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_n \sim \frac{e^\ell}{n^{1/3}}.$$

3. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 3.6.16. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$ et on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

1. Montrer que

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

est une série convergente. On note $S(x)$ sa valeur et S la fonction associée, définie sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $S(0)$?

2. (a) On pose

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k.$$

Rappeler la formule donnant le produit de deux polynômes et en déduire :

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

- (b) En déduire que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$S_n(x)S_n(y) \leq S_{2n}(x+y).$$

Quelle relation en déduit-on pour S ?

3. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| \frac{S(h) - 1}{h} - 1 \right| \leq hS(h).$$

En déduire que S est dérivable en 0 et préciser $S'(0)$.

4. En vous aidant des questions précédentes, montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que S est solution de l'équation différentielle :

$$y' - y = 0.$$

5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$S(x) = \exp(x).$$

Chapitre 4

Calcul différentiel

4.1 Fonctions de deux variables à valeurs réelles

4.1.1 Exemple mathématique et définition

Considérons un rectangle $ABCD$. On appelle x la longueur AB et y la longueur BC . On suppose $x > 0$ et $y > 0$.

On appelle $p(x, y)$ le périmètre de $ABCD$ et $A(x, y)$ l'aire de ce rectangle. On a alors :

$$p(x, y) = 2(x + y), \quad A(x, y) = xy.$$

Définition. Le produit cartésien de deux ensembles E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$.

Si $E = F$, on note $E^2 = E \times E$. Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles, on note

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n) \mid e_i \in E_i\}.$$

Exemple. L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ contient par exemple $(2, \pi)$.

Remarque. Si E et F sont finis, alors

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

Dans notre exemple,

$$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2(x + y), \quad A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy.$$

Si l'on impose $x > 0$ et $y > 0$, on peut écrire

$$p : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad (x, y) \mapsto 2(x + y).$$

4.1.2 Exemple en physique

Il est rare qu'un modèle physique dépende d'un seul paramètre. Par exemple en thermodynamique, une énergie peut dépendre de la température T , de la pression P et du volume V .

4.1.3 Représentation graphique

Soit f une fonction de deux variables définie sur un domaine D . L'ensemble des points

$$(x, y, z) \quad \text{avec } z = f(x, y)$$

est appelé la surface d'équation $z = f(x, y)$.

On représente ainsi les points $M(x, y, f(x, y))$ de l'espace.

Exemple. La surface

$$z = x^2 + y^2.$$

L'intersection avec le plan $z = k$ ($k > 0$) est un cercle de rayon $\sqrt{k}$.

4.2 Dérivées partielles

4.2.1 Rappel : dérivée d'une fonction

On dit que f est dérivable en x_0 si

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

4.2.2 Calcul des dérivées partielles

La dérivée partielle par rapport à x consiste à considérer y constant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

La dérivée partielle par rapport à y consiste à considérer x constant :

$$\frac{\partial f}{\partial y}.$$

On note

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

4.2.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

On définit par exemple :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Exemple. Soit

$$g(x, y) = x^3 e^y.$$

Alors

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 e^y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^3 e^y.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6xe^y, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^3 e^y,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 3x^2 e^y.$$

4.3 Fonction de n variables

Une fonction de trois variables est une application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z).$$

Exemple (loi de Boyle–Mariotte).

$$f(P, V, T) = PV - RT.$$

On peut définir les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial P}, \quad \frac{\partial f}{\partial V}, \quad \frac{\partial f}{\partial T}.$$

4.4 Fonctions à valeurs vectorielles

On peut aussi considérer des fonctions

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Par exemple

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ xyz \end{pmatrix}.$$

On peut alors écrire

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Les dérivées partielles se calculent composante par composante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application :

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

$$f(x, y, z) = x^3 y^4 + y^{-1} z^5.$$

Déterminer l'ensemble de définition puis calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

On peut aussi considérer les applications

$$\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ zx + y \end{pmatrix}, \quad \psi(x, y) = \begin{pmatrix} x + \sqrt{y} \\ x - y \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}.$$

Déterminer leur domaine de définition et calculer leurs dérivées partielles.

4.4.1 Généralisation

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On définit l'espace $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des éléments

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

avec $x_i \in \mathbb{R}$.

De même, $\mathbb{R}^p$ est défini de façon analogue. Si l'on généralise la notion de fonction de plusieurs variables, on peut considérer une fonction

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Dans ce cas il existe p fonctions réelles $f_1, \dots, f_p$ telles que pour

$$X = (x_1, \dots, x_n) \in U$$

on ait

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Notations. Les variables se notent généralement :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} : x, \quad \mathbb{R}^2 : (x, y), \quad \mathbb{R}^3 : (x, y, z), \\ \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Remarque. Si $p = 1$, la fonction est appelée fonction numérique de n variables réelles. Si $p > 1$, on parle de fonction vectorielle de n variables.

4.5 Calculs de limites et continuité des fonctions de plusieurs variables

4.5.1 Technique de recherche de limites

Cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition. Soit f une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ et $A = (a_1, a_2)$ un point de A . On dit que f est continue en A si

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A).$$

Remarque. Si $X = (x, y)$ et $A = (a_1, a_2)$, la notation $X \rightarrow A$ signifie

$$x \rightarrow a_1, \quad y \rightarrow a_2.$$

Définition. La fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .

Théorème (théorème d'encadrement). Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^2$. S'il existe une fonction g telle que

$$\lim_{X \rightarrow A} g(X) = 0 \quad \text{et} \quad |f(X) - \alpha| \leq g(X),$$

alors

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \alpha.$$

Exemple. Soit

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

On a

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y| \rightarrow 0$$

lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

On en déduit

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

On définit alors

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Techniques générales

Lorsqu'on étudie la limite d'une fonction de plusieurs variables, on peut rencontrer des cas où la limite dépend de la direction d'approche.

Si une fonction est discontinue en un point, il peut exister plusieurs chemins menant à ce point donnant des limites différentes.

On peut par exemple approcher $(0, 0)$ selon différentes courbes.

Notion d'arc paramétré.

Un arc paramétré est une courbe décrite par

$$(x(t), y(t))$$

où x et y sont des fonctions d'un paramètre t .

Exemple. Soit

$$f(x, y) = \frac{x + y^2}{|y| + x^2}.$$

En suivant les chemins

$$x_1(t) = 0, \quad y_1(t) = t$$

et

$$x_2(t) = t, \quad y_2(t) = t$$

on obtient deux limites différentes lorsque $t \rightarrow 0$.

Donc f est discontinue en $(0, 0)$.

Récapitulons.

Pour étudier

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

deux situations se présentent :

- si la fonction est discontinue, on peut montrer l'absence de limite en trouvant deux directions donnant des limites différentes ;
- si la fonction est continue, on peut utiliser un encadrement ou un développement limité.

4.6 Notion de différentiabilité

Ce chapitre généralise la notion de dérivation au cas multidimensionnel.

4.6.1 Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Définition. Une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

et

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Ces deux propriétés sont équivalentes à

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Exemple. La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

est linéaire.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

4.6.2 Calcul différentiel

Dérivée selon un vecteur

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur

$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$

si la fonction

$$\varphi(t) = f(a + t\vec{v})$$

est dérivable en 0.

On définit alors

$$D_{\vec{v}}f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Exemple.

Si

$$f(x, y) = xy$$

et

$$\vec{v} = (1, 1),$$

alors

$$f(a + t\vec{v}) = f(1 + t, 1 + t) = (1 + t)^2.$$

Donc

$$D_{\vec{v}}f(a) = 2.$$

Propriété.

Les dérivées selon les vecteurs

$$\vec{i} = (1, 0), \quad \vec{j} = (0, 1)$$

correspondent aux dérivées partielles :

$$D_{\vec{i}}f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_{\vec{j}}f = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Remarque importante.

L'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas nécessairement la continuité de la fonction en ce point.

4.6.3 Fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

Une fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

peut s'écrire

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)).$$

La dérivée suivant un vecteur $\vec{v}$ est

$$D_{\vec{v}}f(a) = \begin{pmatrix} D_{\vec{v}}f_1(a) \\ D_{\vec{v}}f_2(a) \\ D_{\vec{v}}f_3(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple.

Soit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ ye^x \end{pmatrix}.$$

Pour $\vec{i} = (1, 0)$,

$$D_{\vec{i}}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ ye^x \end{pmatrix}.$$

4.6.4 Application différentielle

Définition 3.3. Classes C^0 et C^1 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- f est de classe C^0 sur U si f est continue sur U .
- f est de classe C^1 sur U si

1. f admet des dérivées partielles premières sur U ,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .

Exemple.

La fonction

$$f(x, y) = xy$$

est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

et ces fonctions sont continues.

Propriété 3.2.

Si $U \subset \mathbb{R}^2$, alors

$$C^1(U) \subset C^0(U).$$

Autrement dit, une fonction de classe C^1 est continue.

Définition 3.4.

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k si

- les dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre k existent,
- ces dérivées sont continues sur U .

On dit que f est de classe C^∞ si elle admet des dérivées de tout ordre.

Théorème 3.1 (Schwarz).

Si f est de classe C^2 sur un ouvert U , alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

4.6.5 Différentielle

Définition 3.5.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $d_a f$ telle que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - d_a f(h)}{\|h\|} = 0.$$

L'application $d_a f$ s'appelle la **différentielle** de f en a .

4.6.6 Développement limité d'ordre 1

Théorème 3.2.

f est différentiable en a si et seulement si

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(\|h\|).$$

Si f est de classe C^1 , alors f est différentiable.

4.6.7 Expression de la différentielle

Théorème 3.3.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a , alors

$$d_a f(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

On peut donc écrire

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|h\|).$$

4.6.8 Gradient

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

La différentielle s'écrit

$$d_a f(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Définition 3.7.

Le **gradient** de f en a est

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

On peut alors écrire

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

4.6.9 Matrice jacobienne

Considérons une fonction

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

avec

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_p(X) \end{pmatrix}.$$

La différentielle est

$$d_a f(h) = \begin{pmatrix} d_a f_1(h) \\ \vdots \\ d_a f_p(h) \end{pmatrix}.$$

Définition 4.1.

La matrice jacobienne de f en a est

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}.$$

4.6.10 Jacobien

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on appelle **jacobien**

$$\det(J_a(f)).$$

4.7 Recherche d'extrema

4.7.1 Points critiques

Définition 5.2.

Un point a est un point critique de f si

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Théorème 5.2.

Si f admet un extremum local en a et si f est de classe C^1 , alors

$$\nabla f(a) = 0.$$

4.7.2 Matrice hessienne

Définition 5.3.

La matrice hessienne de f en a est

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Cette matrice est symétrique.

4.7.3 Caractérisation des extrema

Théorème 5.3.

Soit a un point critique.

- si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont positives : minimum local,
- si elles sont toutes négatives : maximum local,
- si elles sont de signes différents : point selle.

4.7.4 Cas de la dimension 2

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

Alors

$$rt - s^2$$

permet de déterminer la nature du point critique :

- $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$: minimum local
- $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$: maximum local
- $rt - s^2 < 0$: point selle
- $rt - s^2 = 0$: cas indéterminé

4.8 Exercices de chapitre

Exercice 4.8.1. On rappelle la loi de Boyle-Mariotte, valable pour une mole de gaz parfait :

$$PV = RT,$$

où P désigne la pression du gaz, V son volume, R la constante des gaz parfaits et T la température du milieu.

1. Calculer $\frac{\partial P}{\partial T}$ et $\frac{\partial P}{\partial V}$.
2. Même question si l'on considère à présent la relation de Van der Waals, avec les mêmes conventions que précédemment, et avec a et b réels :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

Exercice 4.8.2. On considère la fonction définie pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 + 4y + 5.$$

1. Montrer que : $\forall (x, y) \geq 0$, $f(x, y) \geq 0$. Démontrer qu'il existe un point qui minimise $f(x, y)$.
2. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Exercice 4.8.3. On pose :

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
 2. Montrer que $\forall (x, y) \in D$,
- $$|f(x, y)| \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$
3. En déduire

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Exercice 4.8.4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 + y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

En utilisant le même type de raisonnement que dans l'exercice précédent, prouver que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0,$$

c'est-à-dire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.8.5. En se souvenant de la méthode utilisée pour tracer un paraboloïde de révolution, esquisser dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la surface d'équation :

$$z = x^2 + 2x + y^2 - 2y.$$

Exercice 4.8.6. On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 4xy + 6y + 10.$$

1. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Exercice 4.8.7. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) - 1 \geq 0$.

Démontrer qu'il existe un point qui minimise $f(x,y)$.

On désigne par $\nabla f(x,y)$ le vecteur de coordonnées respectives $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Résoudre l'équation $\nabla f = 0$.

Exercice 4.8.8. On appelle f la fonction définie par :

$$f(x,y,z) = \frac{x^3 + zy^3 + 1}{y^2 + xz}.$$

1. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y^2}(x,y,z).$$

2. Calculer

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} f(x,y,z).$$

Exercice 4.8.9. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = -\frac{9}{2}y^2 + 4y + xy - \frac{9}{2}x^2 + 4x - 4.$$

1. Démontrer que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

2. Démontrer que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) \leq 0.$$

En déduire une conséquence graphique pour la surface d'équation

$$z = f(x, y).$$

3. Déterminer un plan de symétrie pour la surface d'équation

$$z = f(x, y).$$

4. Calculer pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Que remarque-t-on ?

Exercice 4.8.10. Déterminer un développement limité en 0, à l'ordre 2, des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

2. $g : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

3. $h : x \mapsto \frac{1}{1-x}$

Exercice 4.8.11. 1. Soit f une fonction dérivable en un point a . Calculer en utilisant deux méthodes différentes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

2. Soit f une fonction deux fois dérivable en un point a . Calculer :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Exercice 4.8.12. On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Montrer que f est prolongeable par continuité.

Exercice 4.8.13. 1. Démontrer que pour tous x, y réels :

$$|xy| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

2. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{*2}$

$$f(x, y) = |xy| - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

- (a) Dédurre de la question précédente une conséquence graphique pour la surface d'équation $z = f(x, y)$.
- (b) Montrer que la surface d'équation $z = f(x, y)$ admet un plan de symétrie.

3. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

pour $x > 0$ et $x < 0$, puis montrer que cette dérivée est discontinue.

Exercice 4.8.14. On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(x - y)}{x - y}$$

- 1. Déterminer l'ensemble de définition D_f .
- 2. Déterminer les dérivées partielles de f et leurs domaines.
- 3. Calculer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$$

par les méthodes suivantes :

- (a) développement limité
 - (b) encadrement
 - (c) définition du nombre dérivé
4. f est-elle prolongeable par continuité en $(1, 1)$?

Exercice 4.8.15. On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{|xy|}{x + y}$$

Montrer que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$ en utilisant deux arcs paramétrés.

Exercice 4.8.16. Étudier la continuité de la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice 4.8.17. La fonction

$$f(x, y, z) = \frac{x^3 y z}{x + y + z}$$

admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 4.8.18. La fonction

$$f(x, y) = \frac{\ln(1+x)(\sin y - y)}{x^2 + y^2}$$

peut-elle être prolongée par continuité en $(0, 0)$?

Exercice 4.8.19. 1. Démontrer que la somme de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

2. Plus généralement, démontrer que toute combinaison linéaire d'applications linéaires est encore linéaire.

Exercice 4.8.20. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ (x, y, z) \mapsto (2x - y, y - \frac{1}{2}z)$
2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \ (x, y) \mapsto xy$
3. $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \ z \mapsto |z|$
4. $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \ z \mapsto \Re(z) + \Im(z)$
5. On appelle F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en 0.

$$k : F \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Exercice 4.8.21. Vérifier que l'expression de la différentielle à l'aide du gradient et du produit scalaire d'une fonction f définie sur un ouvert U , en $a \in U$, et à valeurs réelles, définit une application linéaire.

On pourra commencer par vérifier cette propriété dans $\mathbb{R}^2$, puis dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.8.22. Soit f une application différentiable en un point a de $\mathbb{R}^2$.

On appelle φ_a la fonction définie pour $\vec{u}$ vecteur de $\mathbb{R}^2$ fixé par :

$$\varphi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}$$

Prouver que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_a(t) = df_a(\vec{u}).$$

Exercice 4.8.23. On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{e^x}{1 + y^2}$$

1. Expliquer brièvement pourquoi f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le gradient de f .
3. Donner un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 4.8.24. Calculer la différentielle à l'origine des applications suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^3 + \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

2. $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y, z) = xyz \sin(xy) + 2x + 5$$

Exercice 4.8.25. On appelle $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}^2$.

On définit les applications

$$\Delta : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$\varphi \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

et

$$\Phi : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$\varphi \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Ces applications sont-elles linéaires ?

Exercice 4.8.26. Soit la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{|x|^{3/2}y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

1. f est-elle continue ?
2. Calculer les dérivées partielles de f . Sont-elles continues ?
3. Calculer la différentielle de f au sens de Gâteaux en $(0, 0)$.
4. L'application f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 4.8.27. On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité.
2. Étudier la différentiabilité de ce prolongement.
3. Le prolongement admet-il des dérivées partielles ?
4. La fonction est-elle C^1 sur son domaine ?

Exercice 4.8.28. Reprendre les questions de l'exercice précédent avec

$$g(x, y) = (x^4 + y^4) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^4 + y^4}}\right)$$

Exercice 4.8.29. Étudier la différentiabilité de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice 4.8.30. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 y \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

1. Montrer que l'on peut définir un prolongement par continuité de la fonction f .
2. f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4. Calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

Exercice 4.8.31. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et que f admet des dérivées secondes croisées distinctes en $(0, 0)$.

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Exercice 4.8.32. On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\alpha}{x^2 + y^2 - xy}$$

où $\alpha > 0$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f .
2. On pose $\psi(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.
Montrer que

$$\psi(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

et en déduire l'ensemble de définition.

3. On définit

$$\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- (a) Montrer que ϕ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
- (b) Montrer que

$$|xy| \leq \frac{1}{2} \phi^2(x, y)$$

4. Étudier la continuité de f en $(0, 0)$:
 - (a) cas $\alpha > 1$
 - (b) cas $0 < \alpha \leq 1$
5. Étudier la différentiabilité de f en $(0, 0)$.
6. Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si

$$\alpha > \frac{3}{2}$$

Exercice 4.8.33. Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application

$$\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f \mapsto (f(0), f(1))$$

Rappeler la définition d'une application linéaire et déterminer si φ est linéaire.

Exercice 4.8.34. Soit $\vec{u} = (1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

On définit l'application

$$P(\vec{x}) = \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \vec{u} \right\rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire.

1. Montrer que pour tout $\vec{x} \neq 0$,

$$|P(\vec{x})| \leq \sqrt{2}$$

2. Montrer que P est différentiable en tout point $\vec{x} \neq 0$.
3. Montrer que P n'est pas différentiable en 0.

Exercice 4.8.35. On considère la fonction

$$f(x, y) = \max(x, y)$$

1. Représenter graphiquement $f(x, y)$.
2. Montrer que

$$f(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

3. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.8.36. On considère

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4.8.37. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2 et M^3 .
2. Résoudre l'équation $M + X = I$, où I désigne la matrice identité.
3. Résoudre l'équation $, où X est une matrice colonne 3×1 et$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Calculer $(\det M)^2$ et $\det(M^2)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 4.8.38. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB et BA . Que constate-t-on et comment nomme-t-on cette propriété ?
2. Calculer $\det(AB)$ et $\det(BA)$. Commenter.

Exercice 4.8.39. Déterminer la matrice jacobienne en $X = (x, y)$ de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2y + \ln(1 + y^2)$$

Quel est l'autre nom de cette matrice ?

Donner l'expression matricielle puis analytique de l'application différentielle de f au point X en $H = (h_1, h_2)$.

Exercice 4.8.40. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2y \\ y^3z^4 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice jacobienne $J_a(f)$ en $a = (1, 2, 0)$.

Exercice 4.8.41. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Résoudre l'équation $J_a(f) = 0$.
2. Compléter la résolution si l'on impose $\det J_a(f) = 1$.
3. Résoudre l'équation $J_a(f) = I$ où I est la matrice identité.
4. Compléter si l'on impose $f(0) = 0$.
5. Que vaut $\det J_a(f)$ pour $a = (a_1, a_2)$?

Exercice 4.8.42. On appelle matrice hessienne de f en a la matrice

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

Donner une condition suffisante pour que la matrice hessienne d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soit symétrique.

Exercice 4.8.43. On considère

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 + 3xe^y \\ y - x^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que le déterminant de la matrice jacobienne de f est strictement positif.

Exercice 4.8.44. Soient a et b deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On considère

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a(x) \\ b(y) \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice jacobienne de f .
2. À quelle condition le déterminant est-il strictement positif ?
3. Application : $a(x) = b(x) = x^n$.

Exercice 4.8.45. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 + A - 8I_2$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
3. Déterminer le reste de la division de X^n par $X^2 + X - 8$.
4. En déduire A^n .
5. Calculer $\det A$ et $\det A^n$.

Exercice 4.8.46. On considère

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le domaine D pour que f soit un C^1 -difféomorphisme.
2. Calculer la matrice jacobienne.
3. Calculer le jacobien et étudier son signe.

Exercice 4.8.47. Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

Exercice 4.8.48. Soit M l'ensemble des matrices 3×3 .

On définit

$$\gamma(M) = \sum_{i=1}^3 a_{ii}$$

où $M = (a_{ij})$.

1. Calculer $\gamma(I)$.
2. L'application γ est-elle linéaire ?

Exercice 4.8.49. Déterminer les extrema locaux des applications suivantes et donner le maximum de précisions possibles sur ces extrema :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^4 + x^2 + y^2 + y^4$$

2. $g : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) = x^3 + 2xy - 5x + 5y$$

3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = (3x + 7)e^{-((x+1)^2 + y^2)}$$

4. $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$i(x, y) = 6x^2y^3 - 2x^3y^3 - 3x^2y^4$$

5. $j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$j(x, y) = \cos x e^{\sin y}$$

6. $k : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$k(x, y) = x(\ln x)^2 + xy^2$$

Exercice 4.8.50. On considère la fonction

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

1. Déterminer le gradient de f au point $X = (x, y)$.
2. Calculer pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(-x, -y)$$

et en déduire une conséquence graphique pour la surface représentative de f .

3. Déterminer tous les points critiques de f .
4. Caractériser chacun de ces points critiques.
5. En utilisant une inégalité sur le réel xy , majorer et minorer $f(x, y)$ par un nombre de la forme

$$X^2(x) + Y^2(y) + \alpha$$

et conclure.

Exercice 4.8.51. Soit α un paramètre réel.

On considère

$$f_\alpha(x, y) = 1 + x + \alpha xy + 2y^2 + \alpha x^3$$

1. Calculer le gradient de f_α .
2. Montrer que si (x, y) est un extremum local alors

$$\begin{cases} 3\alpha x^2 - \frac{\alpha}{2}x^4 + 1 = 0 \\ y = -\frac{\alpha x}{4} \end{cases}$$

3. Montrer que ce système admet des solutions si et seulement si

$$\alpha \in]-\infty, 0[\cup \left[\frac{\sqrt{3}}{192}, +\infty[$$

4. Déterminer ces solutions.
5. Construire un chemin paramétré $(x(t), y(t))$ tel que

$$x(t) \rightarrow +\infty, \quad y(t) \rightarrow +\infty$$

et étudier le comportement de f_α .

En déduire des informations sur les extrema éventuels de f_α .

Exercice 4.8.52. On considère

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

et

$$f(x, y) = (2x^2 - 4)^2 + (2x^2 - 4)(y^2 - 1) + (y^2 - 1)^2$$

1. Déterminer les points critiques de g et les caractériser.
2. Montrer que

$$g(x, y) \geq 0$$

pour tout (x, y) .

3. En déduire que f admet quatre minima globaux.
4. On cherche le maximum de g sur le cercle

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$$

- (a) Simplifier $g(R \cos \theta, R \sin \theta)$.
- (b) Déterminer le maximum de g sur C .
- (c) Déterminer le minimum de g sur C .
- (d) Conclure.

Bibliographie